海城生に答えます　〜答えの一案〜　　　D. T.

◆ 三角関数の合成，なぜそうなるのかがわからない

回答

まず，この合成公式が「何の役に立つ」のかわからないと，親しみも有難みもわきませんよね．実はこの「三角関数の合成」，ホントに素晴らしい道具なのです．

◇ どう役に立つのかというと…

２次関数 $y = x^2 - 4x + 8$ の最大値・最小値 を扱うときを思い出して下さい．変数 x を 1 か所に閉じ込める平方完成が役に立ちましたよね．

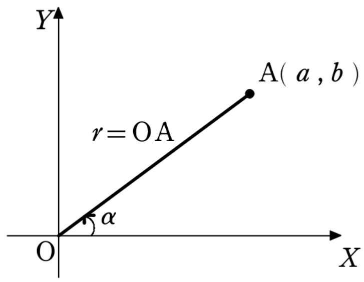
$$y = (x-2)^2 + 4 \qquad \text{よって } x = 2 \text{ のとき 最小値 } 4$$

これと同様に，三角関数の合成公式も $\boxed{\text{変数 } x \text{ を 1 か所に閉じ込める役割}}$ をしてくれて，これが有り難いのです．$\sin x$ と $\cos x$ の 1 次式 $a\sin x + b\cos x$ は $r\sin(x+\alpha)$ のようにまとめることができるのです．

◇ 三角関数の合成公式を（有難みを感じながら）導いてみましょう．

一般に，$a\sin x + b\cos x$ (a, b は正負いずれでもよく，少なくとも一方は 0 でない) が与えられたとき，XY 座標平面上に点 $\mathrm{A}(a, b)$ をとります．

$\mathrm{OA} = r(=\sqrt{a^2+b^2} > 0)$，
動径 OA の角 を α とすると，
三角関数の定義から
$a = r\cos\alpha,\ b = r\sin\alpha$
$\therefore a\sin x + b\cos x$
$\quad = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$
$\quad = r(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha)$
　(←この形を何とか作りたくて，細工をしてきたのです！)



三角関数の加法定理により次の結果が得られ，「三角関数の合成公式」とよばれます．

$$\boxed{a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)}$$

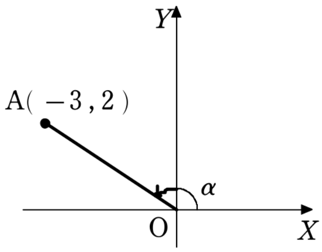
$$\text{ただし } \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

◇ では，実際にこの公式を用いてみて，有難みを味わってみましょう！

（例題）　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき， 関数 $f(x) = 2\cos x - 3\sin x$ の最大値・最小値を求めよ．

（解）XY 座標平面上に右図のように点 A$(-3, 2)$ をとり，

OA の X 軸の正の向きとなす角を α とする．



$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

すなわち　$-3 = \sqrt{13}\cos\alpha,\ 2 = \sqrt{13}\sin\alpha$

このことから

$f(x) = \sqrt{13}(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha) = \sqrt{13}\sin(x+\alpha)$

α は一定値であるから，$0 \leqq x < 2\pi$ における $f(x)$ の

最大値は $\sqrt{13}$，最小値は $-\sqrt{13}$ ……（答）