海城生に答えます　～答えの一案～ A. Mi.

◆ 背理法の使い方はわかるが, それで証明されているのには違和感がある.

回答

ここでは, 「背理法という論法はなぜ正しいのか」ということに焦点を絞って話をしていきます.

ある命題を証明するときに, 直接証明せずにそれと同値な命題を考えて, もとの命題を証明する方法を**間接証明**といいます. 背理法は間接証明の代表的なものです.

数学的対象について, 論理記号や演算記号を用いて記述された文章を**数学的命題**といいます. 例えば, 「$3 < 5$」や「$\triangle \mathrm{ABC}$ において, $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ である」などは数学的命題になります.

数学的命題 P について,

> 「 P である」とその否定「 P でない」のいずれか一方だけが成り立ち, それらがともに成り立つことはないという原理を**排中律**といいます.

これは言い換えると, ある命題 P の否定の否定は, もとの命題 P になることを意味しています. 排中律は一見すると当たり前に思える原理ですが,

「4 以上のすべての偶数は 2 つの素数の和で表すことができる」

のように少し考えただけでは真か偽かわからない命題に対しても, どちらかしかありえないんだと仮定しているのがこの排中律です.

背理法を用いることができるのは, 数学的命題がこの排中律を満たすときだけですが, 数学ではふつう排中律を認めて話を進めていきます.

教科書を見てみると,

「その命題が成り立たないと仮定すると, 矛盾が生じる.
したがって, その命題は成り立たなければならない.」

とする論法がある. このような論法を**背理法**というとあります. ある命題 P の否定を仮定すると矛盾が生じる. つまり, 「 P でないことはない」ということなので, 排中律より「 P である」ことがわかるわけです.

ちなみに, ある命題 A と A の否定がともに真であるとき, それを**矛盾**といいます. 例えば, 「 n は偶数である」かつ「 n は奇数である」というのは矛盾です. これらは同時に成り立つことはありえません.

また, 数学でよく出てくる命題「p ならば q である」の否定は「p かつ q でない」となります. これが否定になるというのも, わかりにくくする要因の一つかもしれません. これは, 論理を少し勉強する必要があります. したがって,

命題「p ならば q である」を背理法を用いて証明するときは,
「p かつ q でない」と仮定して矛盾を導けばよい

ことになります．すなわち, 結論を否定して矛盾を導けばよいのです．

今までみたように, **背理法が納得できない**理由としては,

- そもそも背理法という論法がなぜ正しいのかわからない
- 矛盾とはどういうことなのかわからない
- 命題の否定をつくることができない
- 命題を直接証明しているわけではないので, 直感が働きにくい

などさまざまなことが考えられます．それだけ難しいものなのです．しかし, 背理法はとても強力な論法です．なぜならば, **示したい命題の結論が 1 つであっても, その否定から導かれる矛盾はいろいろある**からです．いろいろあるうちの 1 つを示すほうがアプローチしやすいのです．多くの問題を通じて理解を深めていく必要があります．最後に有名な例をみて回答を終えたいと思います．

問. 素数は無数に存在することを証明せよ．
この問題はユークリッドにより, 鮮やかな証明が与えられています．

証明. 素数が有限個しかないと仮定して矛盾を導く．素数が有限個しかない, すなわち,

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \cdots, \quad p_n$$

の n 個しかないと仮定する．いま, N として,

$$N = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$$

という数を考えると, N は $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ のどの素数でも割り切れないので, 合成数ではない．N が素数であるとすると, いま, 素数は $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ の n 個しか存在しないと仮定したので, これは矛盾である．
したがって, 素数は無数に存在する． □

ここでは,

- 素数は無数に存在する
- 素数は無数に存在しない, つまり, 有限個しかない

のどちらかしかありえない (排中律) という前提のもと, 証明が行われています．