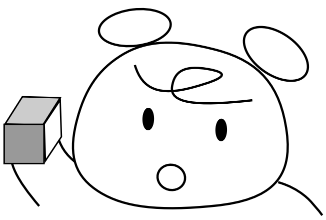
# こういうのも数学
# （後編）

## ６面パズルの数学



小澤　嘉康

# 目 次

# 1 はじめに

前編 (2008) では，数学は中学高校で教えられている教科としての側面だけではないことを多くの人に知っていただきたく，一例として「群」という数学的な見方をすると多少見え方が変わるような例をいくつか紹介しました．

後編では，群の視点で見ると，おもちゃが数学の題材になる例として，**６面パズル**を取り上げます．遊び方の単純さとは対照的に解くことが決して容易ではないところが多くの人を惹きつけるのでしょうか，ロングセラーであり，また様々なバリエーションも存在します．オリジナルの $3 \times 3$ を取り上げるのが良かったのかもしれませんが，数学的解析での面白味は $2 \times 2$ でも十分味わえますし，より簡潔になります．本稿では $2 \times 2$ を扱いますが[1]，$3 \times 3$ も同様の考え方で解析できるだろうということは感じとっていただけると思っています．

さて，本稿で最も重要な操作に $\rho$（ギリシャ文字でローと読みます）というのがあります．この操作 $\rho$ は６面パズルに付属の攻略書 [1] で紹介されているテクニックの１つを使わせてもらいました．理論的には必ずしもこの $\rho$ のように具体的に明示する必要はないのですが，実際に６面パズルを手に取り動かすことでより一層理解が深まりますし，何より，より具体的になるので証明が簡潔になります．

もちろん，攻略書にはこの $\rho$ の他にもいくつものテクニックが紹介されており，いかに効率良く解くかに重点が置かれています．しかし，本稿は攻略書ではなくあくまでも数学的扱いに重点をおいていますので，解くまでに非常に手間のかかる手順を踏みますが，しかしながら，論理の流れは極めて簡潔になっております．多少個々の工夫はありますが，誇張していえば操作 $\rho$ のみで解くことができるという内容になっています．

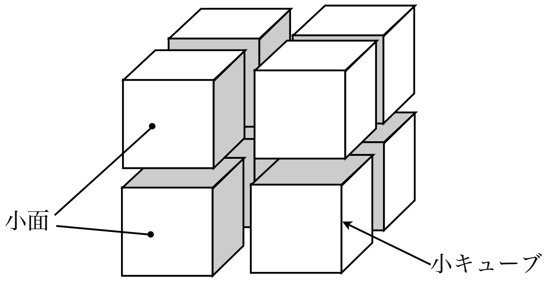
後編では，前編で準備した，群の話， mod ，あみだくじなど用いますが，前編を既にお読みになられた方には，直ぐに思い出せるように，丁寧に著したつもりです．しかしながら，わかりにくい事柄がありましたら，適宜前編を参照していただければと思っております．

また，様々な用語や記号が出てきますので，読み進んでいく途中，前に出た用語や記号の意味がわからなくなることもあるかもしれません．巻末に索引をつけましたのでどうぞご活用下さい．

[1]筆者が $3 \times 3$ を解くことができないからという理由ではありません！

## 2　用語

まず，用語の準備をします．定義ですね．今回は各面が２×２のものを用いますので，構造的には図のように８個のパーツに分解されます．

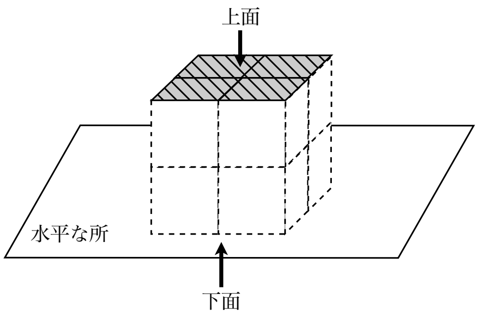



この８個のパーツのそれぞれを**小キューブ**ということにします．各小キューブには表面に出ていて色のついた３つの面を持っています．この色のついた各面をここでは**小面**ということにします．したがいまして，全体では 24 個の小面を持つことになります．

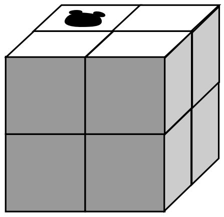
回したりすることを**操作**ということにします．そして，買ってきたばかりで色が揃っている状態を**もとの状態**，一連の（正しい）操作によって色が揃っていない状態を**ごちゃまぜの状態**ということにします．したがいまして，ごちゃまぜの状態には，普通の遊び方をしている限り起こらない**インチキな状態**は含まないことになります．

次に６面パズルを数学的に扱いやすくするために工夫をしていきます．

まず，６面パズルを床や机の上などの水平な所に置いたとき，面の色が揃っているかどうかにかかわらず，上を向いている面を**上面**，床に接している面を**下面**ということにします．

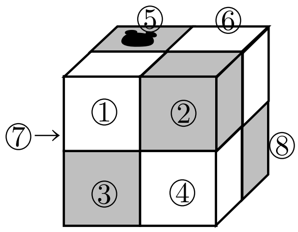


そして，もとの状態で，どの小面でもいいのですがひとつ選び（例えば図の ．たいていの６面パズルにはロゴシールが貼ってあると思います.），その小面が図のように上面の左奥に来るように固定します.



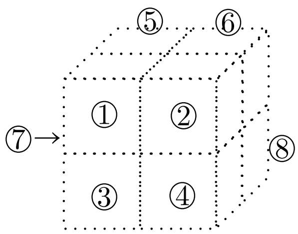
## 小キューブの番号付け

各小キューブのそれぞれに番号を付けていきます．図のように，①から⑧とします.

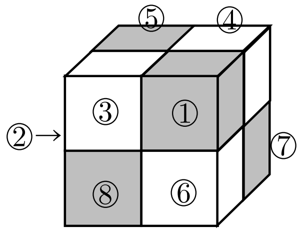



小キューブ⑤は固定してあります.

また，操作によって，各小キューブは移動するので，基準となる位置も決めます．もとの状態で各小キューブがある位置を，**小キューブの基準の位置**とします.




例えば，次のようなとき，




各小キューブと位置の関係は，

| 小キューブ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 位置 | ② | ⑦ | ① | ⑥ | ⑤ | ④ | ② | ⑦ |

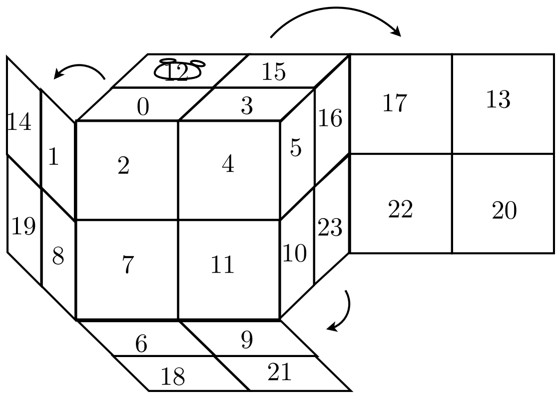
となります．なお，小キューブ⑤は固定してあるので動きません．

## 小面の番号付け

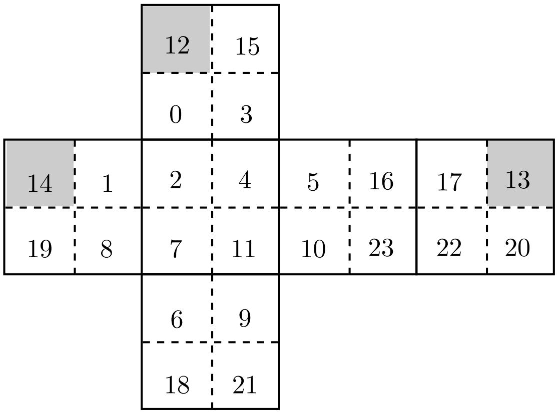
次に，各小面に番号を付けますが，次の規則で 0 から 23 まで付けていきます．

- 小キューブの番号の小さいものから順に付ける．
- 各小キューブにおいては，上面あるいは下面にある小面が必ず 1 つだけあるので，その小面から順に左回りで番号を付ける．

すると，図のようになります．



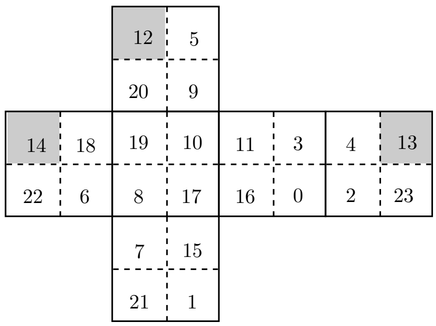
展開図で見ると，



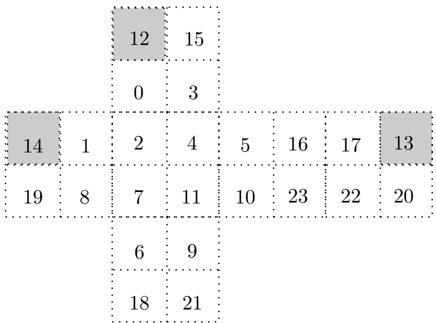

となります．なお，固定してある小キューブのところは網かけにしてあります．

そして，小キューブと同様に，もとの状態で各小面がある位置を，**小面の基準の位置**とします．

例えば，あるごちゃまぜの状態が右の図のようなとき，




小面の基準の位置，つまりもとの位置の番号は右の図ですので，



| 小面 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 位置 | 23 | 21 | 22 | 16 | 17 | 15 | 8 | 6 | 7 | 3 | 4 | 5 |

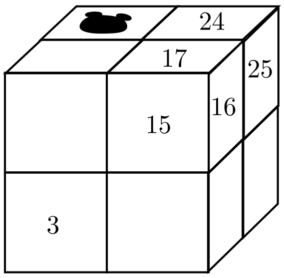
| 小面 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 位置 | 12 | 13 | 14 | 9 | 10 | 11 | 1 | 2 | 0 | 18 | 19 | 20 |

となります．なお，小面 12, 13, 14 は固定してあるので動きません．

## 小キューブの向き

そして，各小キューブの向きを考えます．せっかく各小面に番号を付けたのでこれを利用します．各小キューブはどの位置にあっても，上面あるいは下面にある小面が 1 つだけあります．この小面の数字を 3 で割ったときの余りである，0, 1, 2 の値をもって，その**小キューブの向き**ということにします． **mod 3** で考えるということです．

例えば，次のようなとき，




手前右上の位置②にある 15, 17, 16 の数字のある小キューブは，上面にある小面の番号が 17 ですので，$17 \equiv 2 \pmod 3$ より，向きは 2 となります．

その奥の位置⑥にある，24, 25 の数字が見える小キューブは，裏面の 26 が見えませんが，上面の小面は 24 ですので，$24 \equiv 0 \pmod 3$ より，向きは 0 になります．

また，手前左下の位置③にある，3 の数字のみ見える小キューブは，番号の付け方から左側に 4，下方に 5 が付いていることがわかりますので，$5 \equiv 2 \pmod 3$ ですので，この小キューブの向きは 2 となります．

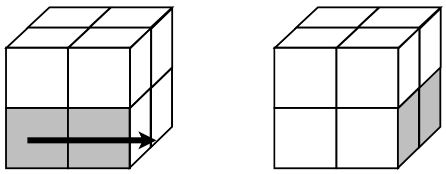
もう，お気づきだと思いますが，先ほどの各小面の番号の付け方ですが，もとの状態のときにすべての小キューブの向きが 0 になるようにしてあります．

## 基本操作

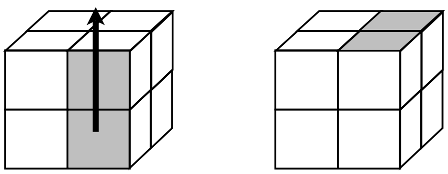
続きまして，操作について考えていきます．小キューブ⑤を固定してありますので，動きとしては，下側の４つの小キューブの回転，右側の４つの小キューブの回転，そして手前の４つの小キューブの回転の３パターンになります．また，それぞれの回転においては，２つずつ方向が考えられますが，一方の方向を基準にすれば，他方の方向は，その「逆」の方向と考えられますし，あるいは，４回同じ方向に回転しますともとに戻りますので，一方の方向を３回繰り返すことを反対の方向に回転することと見ることもできます．

したがいまして，もっとも基本となる操作は次の A, B, C の３つであることがわかります．

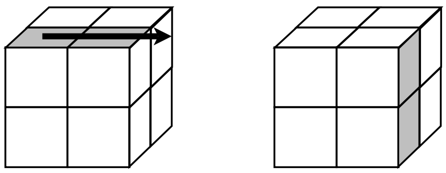
基本操作 A



基本操作 B



基本操作 C



## 3 群を入れる

さて一通り準備ができましたので，いよいよ6面パズルを数学的に見ていきましょう．6面パズルは各小面を一連の操作で入れ替えていくので，置換で表すことができそうだということは直ぐに気がつくと思います．

ここで大事なことは，どのように置換で表現すると扱いやすいか，より具体的にいえば，置換は群になりますので，6面パズルの各々のごちゃまぜの状態を置換で表すときに，どのようにすれば群の計算がしやすいかということを十分考えることです．

せっかく表現したのに計算しやすくなければ余りありがたみがありません．しかしながら，これはいうほどは簡単ではありません．まずは思いついたまま表現し，しばらく計算してみた上で，より明快かつ簡潔になるように手直しをしていくという地道な作業をしていきます[2]．まさに試行錯誤です[3]．数学はある程度できてしまえば，無味乾燥で論理的に整然としているように見えますが[4]，作られていく過程は，このように意外と混沌として人の感覚に依るところが大きいのです．

ここでは次のように，各小キューブあるいは各小面の番号を上の段に，基準の位置を下の段に並べて書くことにします[5]．

小キューブ

$$\begin{array}{c} \text{番号} \\ \text{位置} \end{array} \begin{pmatrix} ⓪ & ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \\ ⓪ & ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \end{pmatrix}$$

小面

$$\begin{array}{c} \text{番号} \\ \text{位置} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

このように表すことで，ごちゃまぜの状態の一つ一つを置換と対応させることで表現できます．

---

[2]話は少しそれますが，数学の問題を解くときに直ぐに模範解答のような答案を書こうとする生徒が少なくありませんが，はじめはドロドロと色々試してみた上でどのように書くと論理的に明快で読みやすいかを考えた方が，良い答案になります．

[3]本稿を仕上げるにあたり何度も作り直しました．それでも，まだまだ改善の余地があると思います．

[4]余り洗練されすぎると，抽象的すぎて一般の人には理解不能になることも …

[5]この表現の仕方は工夫がないように思えるかもしれません．例えば，上の段に位置を，下の段に番号を書いても情報量はまったく同じですが，実は計算が割と面倒になります．もちろん，計算の仕方を工夫すればいいだけですが，ここにもちょっとした工夫が隠されています．

このままでもいいのですが，少しだけ厳密に見てみましょう．置換は群の構造を持っていますので，積を考えることができます．一方ごちゃまぜの状態は置換に対応するのですが，この場合の積とはいったい何なのでしょうか．状態どうしの積といわれてもなかなかイメージが湧かないと思います．正確に述べますと，実は「置換」に対応するのは,「状態」ではなく「操作」なのです．しかしながら状態は置換を用いて表現できることも間違いではありません．

このことを理解するには，前編の図形の合同変換のところを思い出すとよいでしょう．合同変換は群ですが，実際は合同変換を単独で用いるのではなく何かしらの図形に作用させることで意味を持ちます．

６面パズルも同じで，もとの状態からごちゃまぜの状態への一連の操作をまとめたものが置換であり，その置換をもとの状態に作用させることで，ごちゃまぜの状態を表すことができるのです．ではなぜ「状態」と「操作」とが混ざってしまうのかといえば，状態そのものが置換を用いて表すとわかりやすいからであり，流用していることに原因があります．しかしながら，流用していることをしっかりと認識し混乱をしないで利用することは非常に便利なものです．これもまた数学の同一視の発想によるものです．

もとの状態を表す置換は

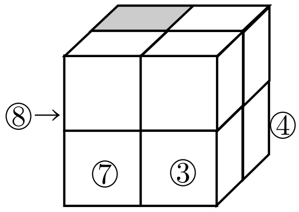
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

で，これは何も入れ替えない **恒等置換** $\boldsymbol{e}$ に対応します．また，あるごちゃまぜの状態を $\sigma$ とすれば，あえて強調して書けば，$\sigma = \sigma e$ となります．ここで，左辺の $\sigma$ は状態を表し，右辺の $\sigma$ は状態 $e$ に作用させた操作を表します．なお，置換は右から左へ順に掛けていくとします．置換は交換法則は成り立ちませんので，掛ける順序や向きに気をつけて下さい．

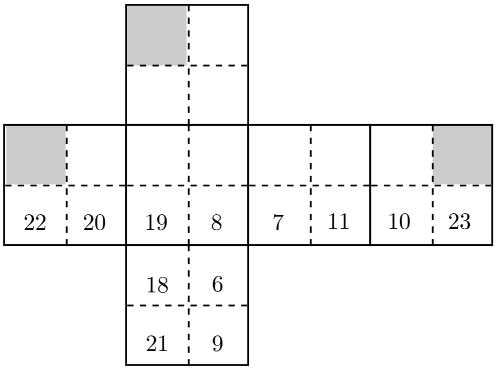
それでは，基本操作 A, B, C を表す置換を求めてみましょう．小キューブの位置のみを考えたときの各基本操作に対応する置換を ⓐ, ⓑ, ⓒ とし，小面で考えたときの各基本操作に対応する置換を $a, b, c$ とすることにします．

なお，小面 12, 13, 14 は動かないので，紙面の都合上，以後は省略して置換を表現します．小キューブ⑤も動きませんが，小キューブは８個しかないので省略せずに書くことにします．

基本操作 A

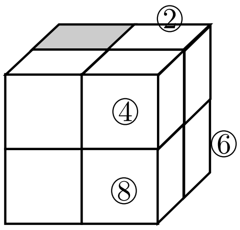



$$ⓐ = \begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} & \text{⑥} & \text{⑦} & \text{⑧} \\ & & \text{④} & \text{⑧} & & & \text{③} & \text{⑦} \end{pmatrix}$$

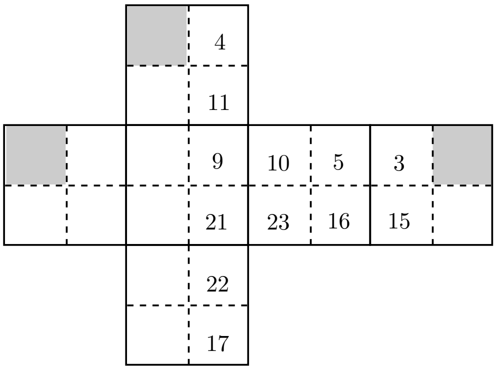



$$a = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ & & & & & & 9 & 10 & 11 & 21 & 22 & 23 & & & & 6 & 7 & 8 & 18 & 19 & 20 \end{array}\right)$$

基本操作 B

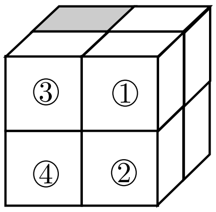



$$ⓑ = \begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} & \text{⑥} & \text{⑦} & \text{⑧} \\ & \text{⑥} & & \text{②} & & \text{⑧} & & \text{④} \end{pmatrix}$$

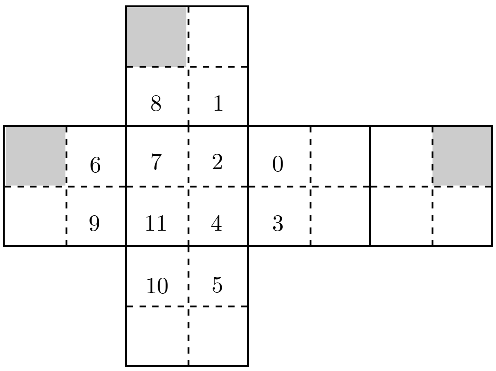



$$b = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ & & & 17 & 15 & 16 & & & & 4 & 5 & 3 & 22 & 23 & 21 & & & & 11 & 9 & 10 \end{array}\right)$$

基本操作 C




$$ⓒ = \begin{pmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \\ ② & ④ & ③ & ① & & & & \end{pmatrix}$$




$$c = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 5 & 3 & 4 & 10 & 11 & 9 & 1 & 2 & 0 & 8 & 6 & 7 & & & & & & & & & \end{array}\right)$$

操作 A, B, C に対応する置換を表現できたので，小面において，一つ例を見てみましょう．

もとの状態を $E$ とします[6]．もとの状態からはじめて，基本操作 A → 基本操作 B → 基本操作 C の順に行った結果の状態を $F$ とします．また，それぞれ途中の状態として，次のように $F_1, F_2$ とします．

$$E \xrightarrow{A} F_1 \xrightarrow{B} F_2 \xrightarrow{C} F$$

状態 $F_1$ は状態 $E$ に基本操作 A を行ったので，$F_1 = aE$ と表せます．繰り返しになりますが，置換は状態の左から掛けていることに注意して下さい．

次に，状態 $F_2$ は状態 $F_1$ に基本操作 B を行なっているので，$F_2 = bF_1$ と表せます．したがいまして，$F_2 = bF_1 = b(aE) = baE$ となります．

同様に考えて，状態 $F$ は，$F = cF_2 = c(baE) = cbaE$ となります．

ここで，$\varphi = cba$ とおくと，$F = \varphi E$ となります．

この一連の流れを置換を使って表現すると，

状態 $E$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |

に操作 A

$$a = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ & & & & & & 9 & 10 & 11 & 21 & 22 & 23 & & & & 6 & 7 & 8 & 18 & 19 & 20 \end{array}\right)$$

を行うと，

状態 $F_1 = aE$ になります．

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| | | | | | | | 9 | 10 | 11 | 21 | 22 | 23 | | | | 6 | 7 | 8 | 18 | 19 | 20 |

[6]状態を $E$ や $F$ のように明示する必要はないのですが，ここでは状態と操作の区別がつきやすいように，敢えてこのように表します．

に操作 B

$$b = \left( \begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ & & & 17 & 15 & 16 & & & & 4 & 5 & 3 & 22 & 23 & 21 & & & & 11 & 9 & 10 \end{array} \right)$$

を行うと，

状態 $F_2 = baE$ になります．

$F_2$ :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| | | | 17 | 15 | 16 | 4 | 5 | 3 | 11 | 9 | 10 | 22 | 23 | 21 | 6 | 7 | 8 | 18 | 19 | 20 |

に操作 C

$$c = \left( \begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 5 & 3 & 4 & 10 & 11 & 9 & 1 & 2 & 0 & 8 & 6 & 7 & & & & & & & & & \end{array} \right)$$

を行うと，

状態 $F = cbaE = \varphi E$ になります．

$F$ :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 5 | 3 | 4 | 17 | 15 | 16 | 11 | 9 | 10 | 7 | 8 | 6 | 22 | 23 | 21 | 1 | 2 | 0 | 18 | 19 | 20 |

なお，もとの状態 $E$ からはじめていますので，最後の状態 $F$ は，$a$, $b$, $c$ の積 $\varphi = cba$

$$\varphi = \left( \begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 5 & 3 & 4 & 17 & 15 & 16 & 11 & 9 & 10 & 7 & 8 & 6 & 22 & 23 & 21 & 1 & 2 & 0 & 18 & 19 & 20 \end{array} \right)$$

になっています．状態と操作を同一視していることのありがたみです．

確認のため，上の置換の見方を説明します．

例えば，小面 20 についてですと，

| | | |
|---|---|---|
| はじめは当然位置 20 にありますが， | 20 | |
| | $\downarrow a$ | $a(20) = 8$ |
| 基本操作 A によって，小面 20 は位置 8 に移動します． | 8 | |
| | $\downarrow b$ | $ba(20) = b(8) = 8$ |
| 基本操作 B では，位置 8 は動きませんので小面 20 は位置 8 のままです． | 8 | |
| | $\downarrow c$ | $cba(20) = cb(8) = c(8) = 0$ |
| そして，基本操作 C では，位置 8 にある小面は位置 0 に移りますので小面 20 は位置 0 に移動します． | 0 | |

なお，逆の操作 $\varphi^{-1}$ は順に逆をたどればよいので，

$$\varphi^{-1} = (cba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}c^{-1}$$

となります．

既にうすうすお感じだとは思いますが，すべての 24 個の数字の置換（それを $S_{24}$ と表しました．）がごちゃまぜの状態に対応しているわけではありません．少なくとも小キューブ⑤は固定されていまうので，小面 12, 13, 14 は動きません．また，また，各小キューブの 3 つの番号も連動して動きますのでかなり制限された置換になります．

一連の操作で起こりうるごちゃまぜの状態を表す置換，すなわち，いくつかの $a$, $b$, $c$ の積で表すことのできる置換のすべてを集めた群をここでは $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ と表し**6面パズル群**ということにします．なお，$\mathcal{R}$ と普通の書体の $R$ とは区別します．また，もとの状態を表す恒等置換 $e$ も $\mathcal{R}$ に含めることにします．$e$ は 6 面パズル群 $\mathcal{R}$ の単位元になります．集合の記号で表しますと，

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{\text{ ごちゃまぜの状態を表す置換 }\} \\ &= \{\text{ いくつかの } a, b, c \text{ の積で表すことのできる置換全体 }\}\end{aligned}$$

となります．$S_{24}$ との関係は，$\mathcal{R} \subset S_{24}$ で，部分群になります．

## 4　定理

実際に存在する状態の集合である $\mathcal{R}$ がどういう性質を持っているのかをこれから調べていくのですが，はじめから直接 $\mathcal{R}$ だけを扱うのは意外と大変ですので，もう少し大きな集合から調べていきましょう．しかしながら，そうはいいましても，$S_{24}$ のように明らかに関係のない置換が多く含まれているような集合から考えるのでは意味がありません．

6 面パズルでは，各小面の色が入れ替わるのですが，各小キューブにある 3 つの小面が小キューブから離れて入れ替わることまでは考える必要はないので，まずは，このあたりの状態から扱っていきます．すなわち，6 面パズルをバラバラにして，8 個の小キューブに分けた後，もう一度組み立て直したときに起こりうる状態の全体の集合から考えていきます．この集合を $\boldsymbol{S}$ とします．もちろん $S$ は群になります．

$$S = \{ \text{バラバラにして再び組み立て直したときの状態を表す置換} \}$$

また，$S$ の中には通常の操作では起こらないインチキの状態も入っていると考えられますので，$\mathcal{R}$ と $S$ と $S_{24}$ の関係は，$\mathcal{R} \subset S \subset S_{24}$ であり，それぞれ部分群になります．

次に，$S$ の元 $\sigma$ に対し，**向きの総和**を考えます．ただし，単純和ではなく，3 で割ったときの余りの値，つまり $\mod 3$ で考えます．よって，$\sigma$ の向きの総和の値は 0, 1, 2 の 3 通りになります．

そして，$S$ の元で，向きの総和が 0 である元の全体を $R_0$，1 である元の全体を $R_1$，2 である元の全体を $R_2$ とします：

$$R_0 = \{\sigma \in S \mid \sigma \text{の向きの総和が} 0\},$$
$$R_1 = \{\sigma \in S \mid \sigma \text{の向きの総和が} 1\},$$
$$R_2 = \{\sigma \in S \mid \sigma \text{の向きの総和が} 2\}.$$

それぞれの状態に対して向きの総和は 1 つに定まりますので，

$$S = R_0 \sqcup R_1 \sqcup R_2$$

となります．なお，$\sqcup$ は互いに共通部分のない和集合を表す記号です．

これで，定理を考えていくのに必要な集合が揃いました．メインの定理は次の通りです．

**メインの定理.**

$$\mathcal{R} = R_0\,.$$

そして，定理の証明は次の流れで行います.

**定理 1.**

$$\mathcal{R} \subset R_0\,.$$

この定理 1. は，明らかなインチキな状態をを見破る方法を指し示してくれます．実は次の定理 2. と合わせると，すべてのインチキな状態を判断できる判定法に昇格します.

**定理 2.**

$$R_0 \subset \mathcal{R}\,.$$

定理 1. とこの定理 2. を合わせたものがメインの定理です．これにより，６面パズル群とはどういう群なのかが決定されます.

次の定理 3. は本筋から離れるのですが，メインの定理より直ぐに導けるので紹介します.

**定理 3.**

$$|\mathcal{R}| = 7! \times 3^6\,.$$

ただし，$|\cdot|$ で集合の元の個数を表します.

定理 3. の証明を見ると，よく説明書等に書かれているパターン数がどのように計算されるのかもわかります.

また，定理を考える上で，最も重要な操作があります．それをギリシャ文字の $\rho$ であらわすことにします．この **操作 $\rho$** は，

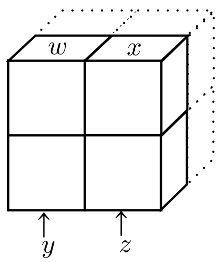
$$\boldsymbol{\rho = c^{-1}a^{-1}cabab^{-1}}$$

というものです．はじめににも書きましたが，本稿の特徴は，この操作 $\rho$ だけでメインの定理を理解しようというところにあります．

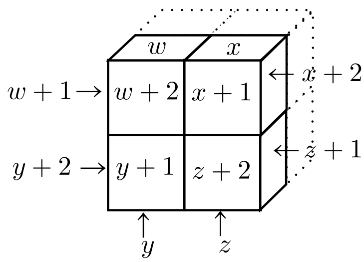
それでは，定理を順に見ていきましょう．

## 4.1 定理 1． インチキの見破り方

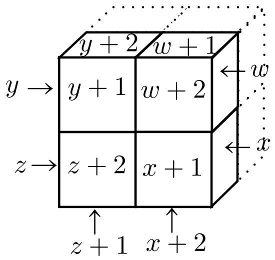
各基本操作によって，各小キューブの向きの総和が不変であることを示せば十分です．基本操作で動く小キューブは 4 つですので，これら 4 つの小キューブで上面あるいは下面ある小面の番号を図のように $w$, $x$, $y$, $z$ とします．説明の都合上見やすいので，まず，基本操作 C の場合から考えます．




すると，各小面の番号の付け方より，左回りの順に 1 ずつ加えていけばよいので，動く小キューブの 12 の小面の番号は図のようになります．ただし，3 で割ったときの余りで考えるものとします．




次に，この状態で基本操作 C を行ってみましょう．各小面の番号は次のようになります．




さて，基本操作 C の前後の状態がわかりましたので，それぞれの向きの総和を計算してみましょう．なお，動かしていない 4 つの小キューブの向きの総和は変化していないので，動かした 4 つの小キューブのみで考えればよいことに注意して下さい．

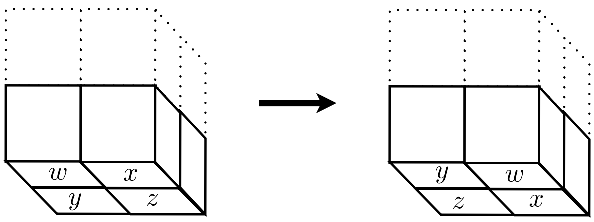
基本操作 C を行う前の向きの総和は $w+x+y+z$ です．

基本操作 C を行った後の向きの総和は

$$(y+2)+(w+1)+(z+1)+(x+2) = w+x+y+z+6 \equiv w+x+y+z \pmod 3$$

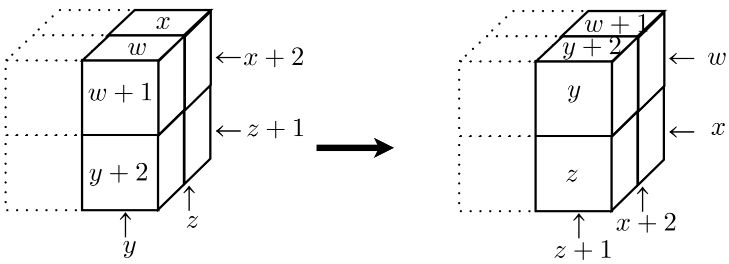
となるので，操作の前と後とで不変であることが示せました．

次に基本操作 A について見てみましょう．そもそも基本操作 A では下面の小面は下面から離れません．




したがって，基本操作 A も操作の前と後で不変であることがわかりました．

最後に基本操作 B です．前と後の状態は下図のようになります．煩雑になるので，影響のない右側の面は省略してあります．



基本操作 B を行った後の向きの総和は

$$(y+2)+(w+1)+(z+1)+(x+2)=w+x+y+z+6\equiv w+x+y+z \pmod 3$$

となるので，操作の前と後とで不変であることが示せました．

以上のことより，基本操作では向きの総和は変わらないことが示せました．

また，もとの状態では向きの総和は 0 になるように定義されていますので，結局，どんなごちゃまぜの状態においても向きの総和は 0 であることが示せました．

このことを集合の記号で表現しますと，

$$\sigma\in\mathcal{R}\Longrightarrow\sigma\in R_0$$

あるいは，

$$\mathcal{R}\subset R_0$$

ということになります．

これより，命題の対偶，あるいは，補集合の包含関係を考えることで，次のことが得られます．

$$\sigma\notin R_0\Longrightarrow\sigma\notin\mathcal{R}$$

あるいは，

$$\overline{R_0}\subset\overline{\mathcal{R}}$$

ですので，**向きの総和が 0 でなければ，正しい操作で得られたごちゃまぜの状態ではない**．したがって，**分解して組立て直すときに失敗したインチキの状態である**と判断できます．

## 4.2　定理 2.　６面パズル群の決定

ここでは，すべての小キューブを正しい位置に戻し，そして各小キューブの向きを正しい向きに戻す，という流れで見ていきます．

**小キューブの位置**

操作 $\rho$ を小キューブの位置のみの着目した操作を ⓟ で表します．

ⓟ $=$ ⓒ$^{-1}$ⓐ$^{-1}$ⓒⓐⓑⓐⓑ$^{-1}$ がどのような置換であるかを計算してみましょう．

まず，そのために各基本操作の逆の操作に対応する置換を求めます．

$$ⓐ = \begin{pmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \\ & & ④ & ⑧ & & & ③ & ⑦ \end{pmatrix}$$

でしたので，ⓐ の逆の置換 $ⓐ^{-1}$ は，上下を入れ替え，上の段を見やすいように ① から ⑧ まで順になるように整理すればよいので，

$$ⓐ^{-1} = \begin{pmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \\ & & ⑦ & ③ & & & ⑧ & ④ \end{pmatrix}$$

になります．なお，置換は上から下への対応が分かればよいので，① から順に並べ直す作業は単に見やすさのためで本質ではありません．

同様に，

$$ⓑ = \begin{pmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \\ & ⑥ & & ② & & ⑧ & & ④ \end{pmatrix}$$

なので，

$$ⓑ^{-1} = \begin{pmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \\ & ④ & & ⑧ & & ② & & ⑥ \end{pmatrix}$$

であり，

$$ⓒ = \begin{pmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \\ ② & ④ & ① & ③ & & & & \end{pmatrix}$$

なので，

$$ⓒ^{-1} = \begin{pmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \\ ③ & ① & ④ & ② & & & & \end{pmatrix}$$

となります．

さて，$ⓟ = ⓒ^{-1}ⓐ^{-1}ⓒⓐⓑⓐⓑ^{-1}$ を実際に計算し見ましょう．くどいようですが，一番右の $ⓑ^{-1}$ から左に順に見ていくことに注意して下さい．

$$① \xrightarrow{ⓑ^{-1}} ① \xrightarrow{ⓐ} ① \xrightarrow{ⓑ} ① \xrightarrow{ⓐ} ① \xrightarrow{ⓒ} ② \xrightarrow{ⓐ^{-1}} ② \xrightarrow{ⓒ^{-1}} ①$$

$$② \xrightarrow{ⓑ^{-1}} ④ \xrightarrow{ⓐ} ⑧ \xrightarrow{ⓑ} ④ \xrightarrow{ⓐ} ⑧ \xrightarrow{ⓒ} ⑧ \xrightarrow{ⓐ^{-1}} ④ \xrightarrow{ⓒ^{-1}} ②$$

$$③ \xrightarrow{ⓑ^{-1}} ③ \xrightarrow{ⓐ} ④ \xrightarrow{ⓑ} ② \xrightarrow{ⓐ} ② \xrightarrow{ⓒ} ④ \xrightarrow{ⓐ^{-1}} ③ \xrightarrow{ⓒ^{-1}} ④$$

$$④ \xrightarrow{ⓑ^{-1}} ⑧ \xrightarrow{ⓐ} ⑦ \xrightarrow{ⓑ} ⑦ \xrightarrow{ⓐ} ③ \xrightarrow{ⓒ} ① \xrightarrow{ⓐ^{-1}} ① \xrightarrow{ⓒ^{-1}} ③$$

$$⑤ \xrightarrow{ⓑ^{-1}} ⑤ \xrightarrow{ⓐ} ⑤ \xrightarrow{ⓑ} ⑤ \xrightarrow{ⓐ} ⑤ \xrightarrow{ⓒ} ⑤ \xrightarrow{ⓐ^{-1}} ⑤ \xrightarrow{ⓒ^{-1}} ⑤$$

⑤は固定してあるので当然ですね.

$$⑥ \xrightarrow{ⓑ^{-1}} ② \xrightarrow{ⓐ} ② \xrightarrow{ⓑ} ⑥ \xrightarrow{ⓐ} ⑥ \xrightarrow{ⓒ} ⑥ \xrightarrow{ⓐ^{-1}} ⑥ \xrightarrow{ⓒ^{-1}} ⑥$$

$$⑦ \xrightarrow{ⓑ^{-1}} ⑦ \xrightarrow{ⓐ} ③ \xrightarrow{ⓑ} ③ \xrightarrow{ⓐ} ④ \xrightarrow{ⓒ} ③ \xrightarrow{ⓐ^{-1}} ⑦ \xrightarrow{ⓒ^{-1}} ⑦$$

$$⑧ \xrightarrow{ⓑ^{-1}} ⑥ \xrightarrow{ⓐ} ⑥ \xrightarrow{ⓑ} ⑧ \xrightarrow{ⓐ} ⑦ \xrightarrow{ⓒ} ⑦ \xrightarrow{ⓐ^{-1}} ⑧ \xrightarrow{ⓒ^{-1}} ⑧$$

となりますので，結局，

$$\rho = ⓒ^{-1}ⓐ^{-1}ⓒⓐⓑⓐⓑ^{-1} = \begin{pmatrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \\ & & ④ & ③ & & & & \end{pmatrix}$$

が得られました．確かに③と④の入れ替え，つまり隣り合う小キューブの互換であることがわかりました．

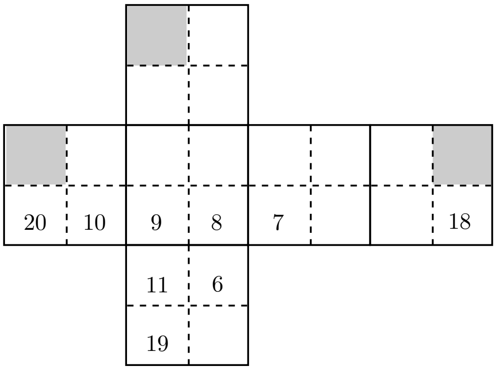
この$\rho$は小キューブ⑤を固定したときの互換ですが，実際には，入れ替えたい隣り合う小キューブが③④の位置に来るように全体を向きを変え，基本操作 A, B, C に「相当する操作」を行えば，すべての隣りあう互換を実現することができます．一方，これら「相当する操作」は基本操作 A, B, C のいずれかなので，具体的に表現するのは

簡単ではないかもしれませんが，理論的にはすべての互換を基本操作 A, B, C のみで表現できるという結論が得られました．

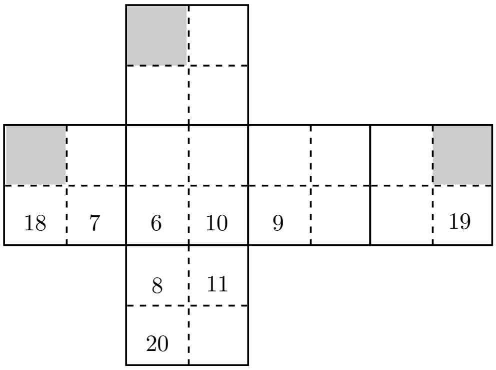
そして，置換群の一般論（あみだくじの原理，前編参照）により，すべての置換は互換の積で表現できますので，結局，小キューブの位置に関しては，どんな位置にあっても，必ず，正しい位置に戻せることができることがわかりました．

## 小キューブの向き

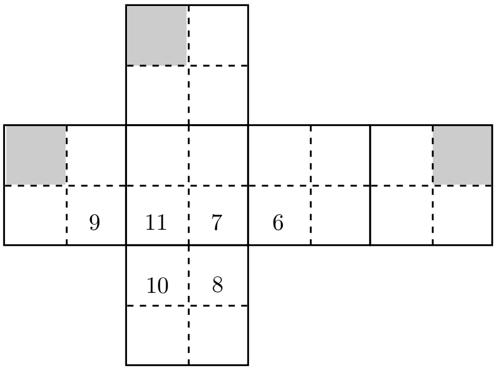
実際に操作 $\rho$ をしてみると気がつくのですが，この操作は③と④の入れ替えの他に，小キューブ⑦が単独で，向きが 1 増える方向に回転していることがわかります．




ですから，もう一度操作 $\rho$ を行うと，③と④は再び入れ替わりますので，向きはもとのままではありませんが，位置は互いにもとに戻ります．そして，⑦は更に向きが 1 増えます．



もう，お気づきですね．更にもう一度操作 $\rho$ を行うと，三度目の③と④の入れ替えが行われるので，このときは，互いに相手の位置に行くのですが，⑦は３回目ですので，もとの向きに戻ります．




つまり，③と④以外，向きを含めてまったく影響のでない操作が得られたことになります．$\rho$ を３度繰り返していますので，$\rho^3$ であり，具体的には，

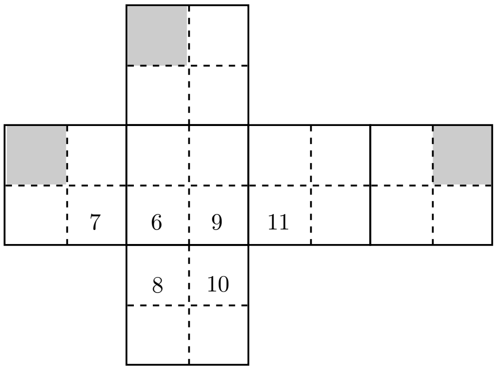
$$\rho^3 = (c^{-1}a^{-1}cabab^{-1})^3 = c^{-1}a^{-1}cabab^{-1}c^{-1}a^{-1}cabab^{-1}c^{-1}a^{-1}cabab^{-1}$$

$$\rho^3 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ & & & & & & 10 & 11 & 9 & 8 & 6 & 7 & & & & & & & & & \end{array}\right)$$

となります．

非常に性質の良い置換が得られました．この置換を更に考察して，より良い性質の使いやすい形にしていきます．

それぞれの小キューブは１つの面の番号が決まれば他の２つの面の番号は自動的に定まりますので，正面を向いている小面７と 11 に注目します．この置換 $\rho^3$ では７と 11 の場所が入れ替わっていることがわかります．この置換は⑤を固定して考えたときの操作ですが，いま，この状態で，小面８と 10 が小面 11 と７の位置に来るように６面パズル全体を回転させます．そして，操作 $\rho^3$ に「相当する操作」をおこなうと，今度は８と 10 の場所が入れ替わりますので，




という状態になります．

向きの総和は３で割ったときの余りで考えますので，$+2$ は $-1$ と同じであることに注意しますと，この置換は，③を向きが $-1$ となるように，④を向きが $+1$ となるように回転させるものであることがわかります．

以上の考察より，すべての小キューブにおいて位置を変えることなく．ただ，隣り合う２つの小キューブの回転のみを行う操作が存在することが示せました[7]．

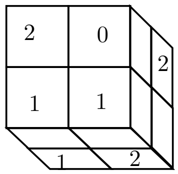
この③を向きが $-1$ となるように，④を向きが $+1$ となるように回転させる置換を $\varphi$(③, ④) と表すことにします．

６面パズル全体の持ち方を変えることで，どの隣り合う２つの小キューブに対しても同様の操作を行うことができますので．例えば，小キューブ①を右回り（つまり向きの値が $-1$ される），小キューブ②を左回り（つまり向きの値が $+1$ される）に回転させる置換を同様に，$\varphi$(①, ②) と表すことにします．なお，$\varphi$(③, ④) と $\varphi$(④, ③) は回転する向きが異なりますので異なる置換になります．括弧内の２つの番号を書く順序に気をつけて下さい．模式的に書けば $\varphi(-, +)$ ということです．

では，いよいよ,「すべての小キューブが正しい位置にあるとき，向きの総和が０であるならば，もとの状態に戻せる」ことを見ていきましょう．

下の図の状態を例にします．各小キューブに書かれている数は，その小キューブの向きの値を表します．また，下面から見た図ですが，唯一見えない小キューブ⑤は固定されていますので，常に向きは０です．

[7]なお，回転の結果の向きの総和は，既に不変であることがわかっていますので，一方が $-1$ で，他方が $+1$ であることも，再確認できました．




ここで，向きの総和は，

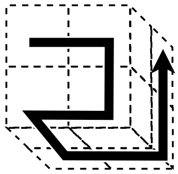
$$\overset{①}{2}+\overset{②}{0}+\overset{③}{1}+\overset{④}{1}+\overset{⑤}{0}+\overset{⑥}{2}+\overset{⑦}{1}+\overset{⑧}{2}=9\equiv 0 \pmod 3$$

と 0 であることを確認して下さい．

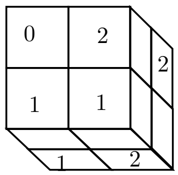
この状態から順に隣り合う 2 つの小キューブずつ向きを変えていきます．どの順でもかまいませんが，固定してある小キューブ⑤は除きますので，ここでは，

$$① \to ② \to ④ \to ③ \to ⑦ \to ⑧ \to ⑥$$

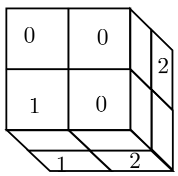
の順とします．



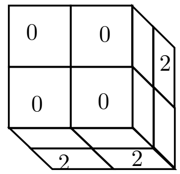
まず，小キューブ①の向きが 2 ですので，0 になるように +1 をしたいと思います．したがいまして，$\varphi(②, ①)$ を行います．すると，小キューブ①は $2+1=3\equiv 0 \pmod 3$ となり，小キューブ②は $0-1=-1\equiv 2 \pmod 3$ となります．



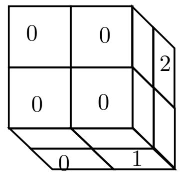

次に，小キューブ②の向きが 2 から 0 になるように +1 をしたいので，$\varphi(④, ②)$ を行います．すると，小キューブ②は 0 となり，小キューブ④は 1 から，0 になります．



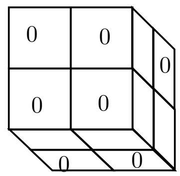
小キューブ④は既に 0 ですので，その次の小キューブ③に対して，$\varphi$(③, ⑦) を行って，




次の小キューブ⑦に対しては，$\varphi$(⑧, ⑦) を行って，




最後に小キューブ⑧に対しては $\varphi$(⑥, ⑧) を行って，




となり，すべて向きが 0 になりました．よって，もとの状態に戻すことができました．

以上さり気なく置換を行いましたが，実は重要なポイントがあります．それは，この手順で行えば必ず最後にすべてが 0 になるということです．

小キューブを一つずつ順に向きを 0 に戻していくという操作は上で見たように，注目している小キューブのみに着目し相方の小キューブは考えなくてよいので確実に行うことができます．ところが，必ず 2 個一組で回転するので，最後の 2 個の一組（ここでは注目している⑧と相方の⑥）は同時に 0 にならなくてはいけません．もし，最後の操作をしたときに，残った 1 つの小キューブの向きが 0 でなかったとすると，他のすべてのキューブの向きは既に 0 になるように操作されていますので，一緒に回転する相手がいないことになり，結果もとの状態に戻せないということになります．しかしながら，ここで主張したいことは，このように最後に向きが 0 でない小キューブが 1 つだけ残ることはない，ということです．

なぜならば，そもそも向きの総和が 0 である状態からはじめ，しかも，一連の操作によって向きの総和は変わらないことが既に示されていますので，最後に向きが 0 でない小キューブが 1 つだけ残るような向きの総和が 0 でない状態は起こりえないことになります.（背理法）

したがいまして，最後の 2 個の一組は一方を 0 にする置換をすると，必ず同時に最後の 1 個の向きも 0 になることが示されました.

以上の考察より，

$$\sigma \in R_0 \Longrightarrow \sigma \in \mathcal{R}$$

つまり，

$$R_0 \subset \mathcal{R}$$

であることが示せました.

## 4.3　定理 3.　パターンの総数

以上でメインの定理は示せましたが，この定理から直ぐに導ける結果として，6 面パズルで起こりうる状態の総数を求めてみましょう．なお，6 面パズル全体を回して同じ状態になるものは同一とみなします[8].

小キューブ①のみ右向きに回転する，つまり向きが $+1$ となる置換を $\tau_1$，小キューブ①のみ左向きに回転する，つまり向きが $+2$ となる置換を $\tau_2$，とします．また，$\tau_0$ を何もしない置換，つまり恒等置換 $e$ とします.

$\tau_0$ は恒等置換であるので，$\tau_0 \in \mathcal{R}$ ですが，$\tau_1$ と $\tau_2$ は向きの総和が 0 でなくなるので，$\mathcal{R}$ の元ではありません．$\tau_1 \in R_1$, $\tau_2 \in R_2$ であり，$R_1 \subset S$, $R_2 \subset S$ ですので，$\tau_1, \tau_2 \in S$ ではあります．ここで，補足ですが，$R_1, R_2$ は集合としては $S$ の部分集合ですが，どちらも単位元 $e$ を含みませんので群にはなりません．置換を考えるには，$R_1$ や $R_2$ ではなく，群になる $S$ で考える必要があります.

定理 3. を示すために，まず,

$$\tau_0 R_0 = R_0, \quad \tau_1 R_0 = R_1, \quad \tau_1 R_0 = R_2$$

[8]いわゆる円順列です.

であることを示します．ここで，新しい記号が出ましたので説明します．例えば，$\tau_1 R_0$ とは，$\sigma \in R_0$ を用いて $\tau_1\sigma$ と表せる元全体の集合を表します．つまり，

$$\begin{aligned}\tau_0 R_0 &= \{\tau_0\sigma \,|\, \sigma \in R_0\} \\ \tau_1 R_0 &= \{\tau_1\sigma \,|\, \sigma \in R_0\} \\ \tau_2 R_0 &= \{\tau_2\sigma \,|\, \sigma \in R_0\}\end{aligned}$$

ということです．これが示せますと，

集合の定義の仕方から，$\sigma \in R_0$ に対しては，$\tau_1\sigma \in \tau_1 R_0$ が対応するので，$|R_0| \leqq |\tau_1 R_0|$ であり，$\tau_1 R_0 = R_1$ とあわせて，

$$|R_0| \leqq |R_1|$$

となります． 逆に $\tau_1\sigma \in R_1$ に対しても，$\sigma = \tau_1^{-1}\tau_1\sigma \in R_0$ が対応するので，$|\tau_1 R_0| \leqq |R_0|$ であり，

$$|R_1| \leqq |R_0|$$

となります．したがって，$|R_0| = |R_1|$ が成り立ちます．

同様に，$|R_0| = |R_2|$ も成り立ちますので，

$$|R_0| = |R_1| = |R_2|$$

であることがわかります．

ここで，$S$ の元の個数を求めてみます．$S$ の元である置換は，バラバラにして組み立て直した状態に対応しますので，次のように計算できます．

小キューブ⑤は固定されていますので，小キューブの位置のみの配置の場合の数は，7 個の順列ですので，7! 通りです．そして，固定されている⑤以外の 7 個のキューブはそれぞれ 3 通りの向きを持ちますので，

$$|S| = 7! \times 3^7$$

と求まります．

さて，$S = R_0 \sqcup R_1 \sqcup R_2$ であり，$|R_0| = |R_1| = |R_2|$ であることを用いますと，

$$|\mathcal{R}| = |R_0| = |S| \div 3 = \frac{7! \times 3^7}{3} = 3674160$$

と求まります.

それでは，最後に，$\tau_0 R_0 = R_0$,　$\tau_1 R_0 = R_1$,　$\tau_1 R_0 = R_2$ であることの証明を見ていきましょう.

$\tau_0 R_0 = R_0$ については，$\tau_0 = e$ ですので自明です.

$\tau_1 R_0 = R_1$ も $\tau_2 R_0 = R_2$ も証明の方法は同じですので，$\tau_1 R_0 = R_1$ のみを示します. 集合として等しいことの証明は，$\tau_1 R_0 \subset R_1$ と $R_1 \subset \tau_1 R_0$ がともに成り立つことを示します.

まず，$\tau_1 R_0 \subset R_1$ について．これは $\sigma \in R_0$ に対して $\tau_1 \sigma$ が $R_1$ の元であることを示します．$\sigma$ の向きの総和は 0 ですので，その状態 $\sigma$ において $\tau_1$ を行うことは小キューブ①のみ向きが $+1$ になるように回転するので，向きの総和は $+1$ されます．したがって，$\tau_1 \sigma \in R_1$ がいえます．よって，$\tau_1 R_0 \subset R_1$ が示せました.

次に，$R_1 \subset \tau_1 R_0$ について．これは $\sigma' \in R_1$ に対して $\sigma' = \tau_1 \sigma$ となる $\sigma \in R_0$ が存在することを示します．$\sigma'$ の状態に対して小キューブ①以外の 7 個の小キューブについては位置も向きも同じであり，小キューブ①を向きの総和が 0 になるようにした状態を $\sigma$ とすると，当然向きの総和が 0 なので，$\sigma \in R_0$ となります．この $\sigma$ と $\sigma'$ との違いは小キューブ①の向きのみですが，状態 $\sigma$ に $\tau_1$ を行うと，小キューブ①のみ回転し，しかも向きの総和が 1 となりますので，$\sigma' = \tau_1 \sigma$ が成り立ちます．つまり，$\sigma' \in R_1$ に対して $\sigma' = \tau_1 \sigma$ となる $\sigma \in R_0$ が存在することが示せましたので，$R_1 \subset \tau_1 R_0$ が示せました.

## 5　今後の課題

$\mathcal{R}$ 内の任意の元を $a, b. c$ で表現するためのアルゴリズムがあるのではないかと推察しています．つまり，どんなごちゃまぜの状態 $\sigma$ が与えられても，あたかも素因数分解のように $a, b, c$ の積に表現する計算方法があるはずだと感じております．もしかしたら，置換は行列で表現できますので，行列の理論からアプローチでできるのではないかとも考えております．しかしながら，全くの不勉強のため今はどこから手をつけていいのかすらわからない状態です．解決し次第，補訂版を出すつもりでいます．これにより「6 面パズルの数学」が真に完結するものだと考えております.

## 6　終わりに

今回講習という形式で中学３年生を対象にこの６面パズルの内容の話をしました．実は６年前にも当時の中学３年生を対象に講習を開き，そのときに原稿も大方できていたのですが，筆不精のためなかなか完成させることができませんでした．再び講習を開くことを機に，今回こそ完成させる意気込みで臨みました．当初は以前の原稿に加筆していけば完成するだろうと甘く考えていましたが，講習を進めていく中で，より明解にできることに気がつき，また，受講してくれた生徒の率直な疑問や感想も取り込んでいきましたので，結局，ほとんど書き直しに近いことになりました．相変わらずのことですが，原稿の提出が３月末になってしまい，研究収録委員会の皆様にはいつもながらご迷惑をおかけしました．

また，講習の受講生で，率直な疑問や感想をいってくれたり，途中ではありましたが原稿のチェックなどしてくれた，片山健太郎君，澤田浩晃君，高松裕君，山根成章君，湯原拓也君，の５名にはこの場をお借りして感謝します．そして６年前の講習のときに，非常に有益な指摘をしてくれた山本遼君にも今更ながらではありますがこの場をお借りして心より感謝いたします．

2013.3.18

# 参考文献

[1] 『ルービックキューブに付属の 6 面攻略書』メガハウス

[2] David Joyner『Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other Mathematical Toys』The Johns Hopkins University Press (2002)

[3] W. D. Joyner『Mathematics of the Rubik's cube』 `http://web.usna.navy.mil/~wdj/rubik_nts.htm` (1996)

[4] 『数学セミナー vol. 20 no. 8』日本評論社 (1981)

# 索 引