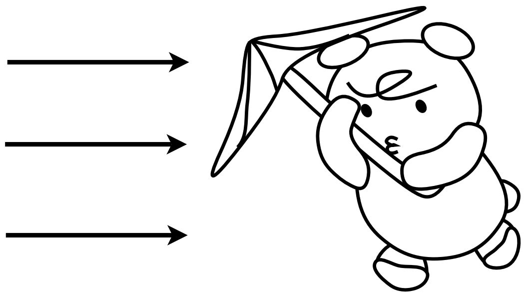
こういうのも高校生の

ベクトル



小澤　嘉康

はじめに

本稿は２０１３年度の高校１年生で行った授業ノートの一部である．

通常高校のベクトルのカリキュラムでは，平面ベクトルを一通り学んだ後に空間ベクトルを扱う．そして，空間ベクトルでは，平面ベクトルで学んだ事柄の多くが同じ性質を持つため，平面と空間とで異なる点が強調される．

しかしながら初学生にとって，何が同じで何が違うのかの区別を明確にすることは容易ではなく，また，なぜ同じものと異なるものがあるのかの理由も明確ではない．

ベクトルを学ぶことの利点は，平面でも空間でも多くの性質が同じに成り立つことにあり，一方，性質が異なるように見える事柄も，別の見方をすれば，実は同じであることにある．これは本来ベクトルはかなり抽象的な概念であることに因り，一つの例として「図形」への応用があるということである．したがって，一般的に成り立つ「抽象的」な部分と，図形に応用した「具体的」な部分を明確に分けることは意味がある．本稿では第１章が一般論，第２章が図形となっている．

ひとつひとつの事柄に対し個々に性質を覚えていくのではなく，一歩掘り下げて，本質的に同じであることは何であるかを考えることは，数学教育の基本であると考える．特に高校生になるとどうしても効率よく速く答えが求まるテクニック（技術）に重点をおき，抽象的にじっくり考えること（理論）を軽視しがちであるが，実は一見遠回りのように思える理論の習得を確実にしておけば，技術的なことは自然に導けることが多い．結果，解法をひとつひとつ覚えていくより理解度がよい．

このような観点から，まだ比較的時間にも気持ちにも余裕のある高校１年生に対し，ベクトルの授業の構成を一般的な構成からアレンジした．その概要がわかるように，本稿では標準的な内容のところは記述を簡潔に，多くの教科書や参考書では余り扱われていない内容のところは省略をせずに記述した．いろいろなご意見をいただければ幸いである．

いつものことながら，原稿の提出が遅くなってしまい，研究集録委員会の皆様に多大なるご迷惑をおかけしたことをこの場を借りてお詫び申し上げる．

2014.3.31　小澤　嘉康

目 次

第1章　基本

1.1　定義

1.1.1　記号

平面上の点の**座標**は２つの数の組 $(a_1,\,a_2)$，空間上では３つの数の組 $(a_1,\,a_2,\,a_3)$ を用いこのように表せる．そこで，これらの数の組を，

$$\vec{a}=(a_1,\,a_2) \qquad \text{あるいは} \qquad \vec{a}=(a_1,\,a_2,\,a_3)$$

のように表すと扱いやすい．このように書いたとき，座標を**ベクトル**ともいう．

まず，いくつか注意をしておく：

- 単に a だと単なる数と混乱するので→を付けた．人によっては，$\boldsymbol{a}$ と太字で書く．
- ベクトル $\vec{a}$ とは座標のこと．したがって，時々に応じ，座標といったりベクトルといったりするが同じものなので混乱しないこと．

  詳しくは直ぐ後で述べるが，座標の集合（つまり，座標平面や座標空間）に“ある決まった演算”を入れたのがベクトルの集合である．
- 座標を構成する数を**成分**という．そして成分の個数をその空間[*1]の**次元**という．

  したがって，平面は２次元の空間，空間は３次元の空間，直線は１次元の空間，となる．

  逆に n 個の成分を持つとき，n 次元の空間という．
- 普通，

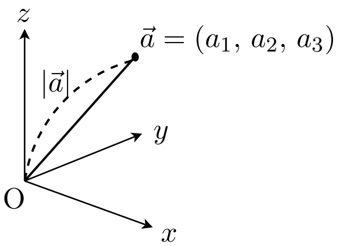
  平面 $(a_1,\,a_2)$ のとき，a_1 を x 成分，a_2 を y 成分という．

  空間 $(a_1,\,a_2,\,a_3)$ のとき，a_1 を x 成分，a_2 を y 成分，a_3 を z 成分という．

[*1]「空間」という用語には，平面に対する「立体の空間」を指す場合と平面や直線，立体の空間などすべてを含む「一般の空間」を指す場合がある．この場合は後者である．

しばらく，２次元でも３次元でも同じなので，３次元で述べる[*2].

- 原点 $\mathrm{O} = (0,\, 0,\, 0)$ を $\vec{0}$ で表す．**零(ゼロ)ベクトル**という．
- $\vec{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$，　$\vec{b} = (b_1,\, b_2,\, b_3)$ のとき，$\vec{a} = \vec{b}$ とは，各成分が等しいこと，つまり，$a_1 = b_1,\, a_2 = b_2,\, a_3 = b_3$ のこと．
- $\vec{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$ において，その**大きさ $|\vec{a}|$** を，$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ で定義する．原点から点 $\vec{a}$ までの**距離**のこと．



- 当然，$\vec{a} = \vec{b}$ ならば $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ であるが，逆は真でないので注意が必要．
- 大きさが１のベクトルを**単位ベクトル**という．
  一般に $\vec{a} \neq \vec{0}$ に対し，$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ は $\vec{a}$ 方向の単位ベクトルである．
  特に，$(1,\, 0,\, 0),\ (0,\, 1,\, 0),\ (0,\, 0,\, 1)$ のように一つの成分のみ１で他はすべて０であるベクトルを**基本ベクトル**という．

  基本ベクトルは次元の数と同じだけある．

1.1.2　演算

座標に，形式的に演算「加法」と「定数倍」を導入する．(図形的な意味については次節で述べる．)

$\vec{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3),\ \vec{b} = (b_1,\, b_2,\, b_3)$ において，

$$\begin{array}{lrcll} \textbf{加法} & \vec{a} + \vec{b} & = & (a_1 + b_1,\, a_2 + b_2,\, a_3 + b_3) & \\ \textbf{定数倍} & k\vec{a} & = & (ka_1,\, ka_2,\, ka_3) & (k\text{ は実数}) \end{array}$$

と定義する．つまり各成分ごとに計算をする．

[*2] ３次元 $(a_1,\, a_2,\, a_3)$ で $a_3 = 0$ とすれば $(a_1,\, a_2,\, 0)$ となり，これは２次元 $(a_1,\, a_2)$ とみなせる．

- $k=-1$ のとき．

  $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$ と書く．これより，$-\vec{a}=(-a_1,\,-a_2,\,-a_3)$ となる．

  $\vec{a}$ に対し，$-\vec{a}$ を**逆ベクトル**という．

- $\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$ と書く．これより，**減法**：$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\,a_2-b_2,\,a_3-b_3)$ も定義される．

- 演算は各成分ごとなので，次の各性質も成り立つ．

  結合法則：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$．これより，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書ける．

  $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$．これより，$kl\vec{a}$ と書ける．

  交換法則：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

  分配法則：$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$,

  $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

  （心配なら各自で確かめよ．）

定義. ベクトルの定数倍の和を**一次結合（線形結合）**という．

これら演算「加法」と「定数倍」を導入した座標をベクトルという．明らかに次の重要な性質が成り立つ：

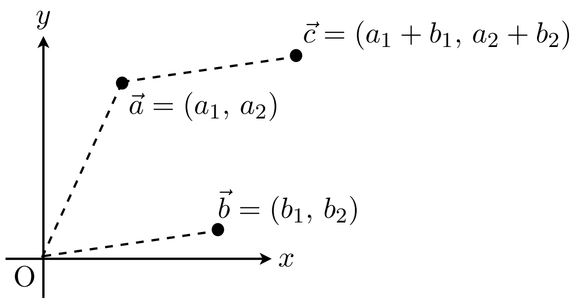
性質. ベクトルは，加法と定数倍については自由に計算して良いので，ベクトルの一次方程式は単なる数字の一次方程式のように計算して良い．

1.1.3　演算の図形的意味

前節で導入した演算の図形的な意味について考える．ここでは，見やすいので平面で考えるが，空間でも同じ．

加法

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ とする．



$\vec{c}$ は $\vec{a}$ から $\vec{b}$ 分だけ移動したと見ることができる．つまり，

$$\begin{array}{ccccc} \vec{a} & + & \vec{b} & = & \vec{c} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{始点} & & \text{移動量} & & \text{終点} \end{array}$$

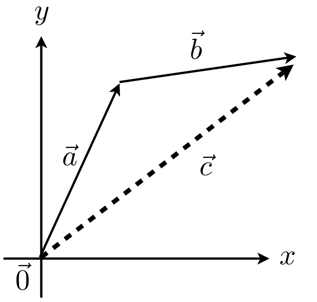
と見ることができる．

　また，$\vec{a}$ は，

$$\begin{array}{ccccc} \vec{0} & + & \vec{a} & = & \vec{a} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{始点} & & \text{移動量} & & \text{終点} \end{array}$$

と見ることで，点 $\vec{a}$ も原点 $\vec{0}$ から $\vec{a}$ 分だけ移動したと考えることができる．

　これより，$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} + \vec{a} + \vec{b}$ と見れば，ベクトルは，もとは座標であるが，次の図のように移動量と捉えることができる．



移動量としてのベクトルは**矢印**で表すとわかりやすい．なお，矢印の長さがベクトルの大きさである．

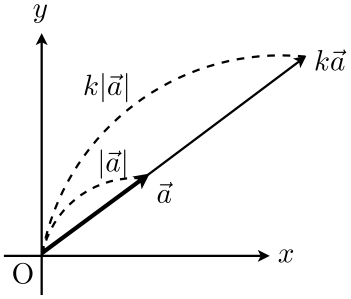
補足. ベクトルを移動量として捉えるときはその「動き」が重要なので，ベクトルの矢印の始点はどこでもよい．つまり，**平行移動して重なるベクトルはすべて同じである**．

　一方，座標としてのベクトルは，原点を始点に固定した特別な場合であり，**位置ベクトル**ということもある．

補足. 一般に加法は同質の量どうしの演算であるので，ベクトルの加法を,「点＋移動量」と捉えるのではなく,「移動量＋移動量」と捉える方が理にかなっている．しかしながら，点を原点 O からの移動量とみなすことで「点」と「移動量」とを同一視できる.

定数倍

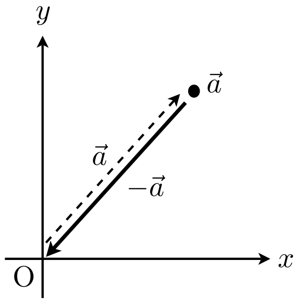
$k>0$ において，$\vec{a}$ と $k\vec{a}$ の関係は特に説明はいらないであろう.



$\vec{a}$ と $-\vec{a}$ について．ベクトルを座標を見れば $\vec{a}$ と $-\vec{a}$ は原点対称な点であるが，移動量と見ると,

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

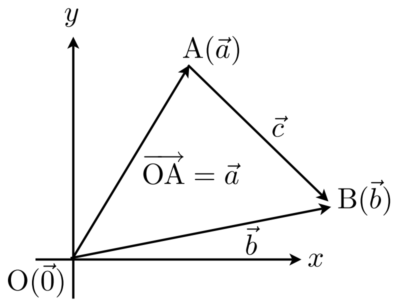
より，$-\vec{a}$ は点 $\vec{a}$ から原点に向かう矢印と見ることができる.



$\vec{a}$ は原点から点 $\vec{a}$ に向かう矢印なので，$\vec{a}$ と $-\vec{a}$ は大きさは等しく向きのみ逆の矢印どうしの関係である.

次に，点 A の座標を $\vec{a}$，点 B の座標を $\vec{b}$ とする．このとき，$\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ と書く[*3]．また，$\vec{a}$ は点 O から点 A までの移動量なので，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表す.

[*3]例えば，点 A の座標が $(3,\,4)$ のとき，$\vec{a}=(3,\,4)$ であるので，$\mathrm{A}(\vec{a})$ とは，$\mathrm{A}((3,\,4))$ のこと．座標の書き方 $\mathrm{A}(3,\,4)$ と比べると，括弧が 2 重になっているが同じと見る.



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$（つまり点 A から点 B への移動量）を $\vec{c}$ とすると，$\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$ より，

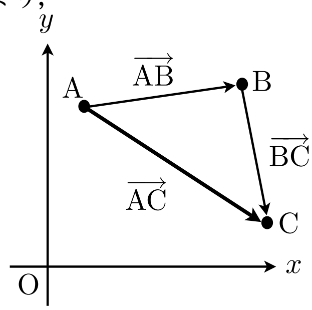
$$\begin{array}{ccccc} \vec{c} & = & \vec{b} & - & \vec{a} \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{終点} & & \text{始点} \end{array}$$

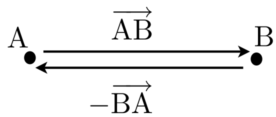
となる．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるので，

$$\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{\mathrm{AB}} & = & \overrightarrow{\mathrm{OB}} & - & \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{終点} & & \text{始点} \end{array}$$

と表すことができる．ベクトルは移動量でもあるので，終点の座標から始点の座標を引くことで求まるというこの式は，普段の感覚と一致する．

また，下の図より，





$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

もわかる．当然，

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}\,.$$

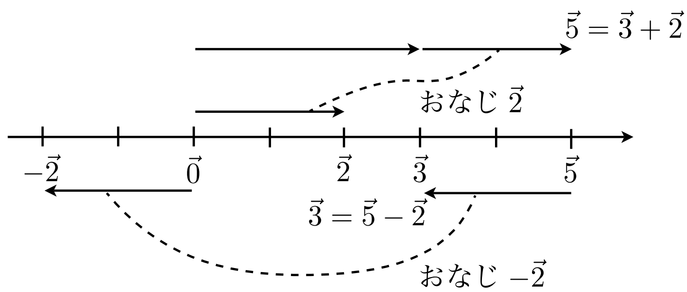
1.1.4　まとめ

座標に演算を入れることでベクトルになる．

	座標としてのベクトル (位置ベクトル)	移動量としてのベクトル
図形的	点	矢印
相等	同じ点	平行移動で重なる矢印
大きさ	原点からの距離	矢印の長さ
演算	加法 定数倍	つなげる 伸ばす

このようにベクトルに 2 つの見方を考えることは「便利」だからである．

難しく考えることはない． 1 次元で考えれば納得．なお，下の図で数字の上に $\rightarrow$ がついているが，これはイメージを表したもので，本来はこのような表し方はしないので注意せよ．



1.2　一次独立

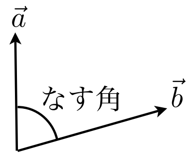
1.2.1　定義

定義. $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ において.

- $k > 0$ により，$\vec{a} = k\vec{b}$ となるとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**同じ向き**,
- $k < 0$ により，$\vec{a} = k\vec{b}$ となるとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**反対の向き**,

といい両方あわせて $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行**といい，$\boldsymbol{\vec{a} /\!/ \vec{b}}$ と書く.
　つまり，$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}\ (k \neq 0)$

- $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を同じにしたときにできる角（0° 以上 180° 以下の方）を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**なす角**という.



$$\text{平行とは}\begin{cases} \text{同じ向き} & \Longleftrightarrow \quad \text{なす角}\,0^\circ \\ \text{反対向き} & \Longleftrightarrow \quad \text{なす角}\,180^\circ \end{cases}$$

定義 (一次独立・一次従属). いくつかの $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ において，

$$\boldsymbol{p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 + \cdots + p_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0}$$

が成り立つとき，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots \vec{a}_n$ は**一次独立**であるという．一次独立でないとき**一次従属**であるという.

補足. 一次従属とはその中のベクトルで他で表せるものがあるということ．例えば，$p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 + p_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ かつ $p_1 \neq 0$ とすると，

$$\vec{a}_1 = -\frac{p_2}{p_1}\vec{a}_2 - \frac{p_3}{p_1}\vec{a}_3$$

と $\vec{a}_1$ は $\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ で表せる.
　これより，一次独立とは，その中のどのベクトルも他では表せないということであることがわかる.

1.2.2　次元の別の表現

考えている空間において，一次独立となるベクトルの最大の個数が次元（つまり，基本ベクトルの個数）である．

平面：２次元	$\Leftrightarrow$	一次独立なベクトルは最大２個 （３個以上のベクトルは必ず一次従属）※
	$\Leftrightarrow$	基本ベクトルは $(1, 0)$, $(0, 1)$ の２個
空間：３次元	$\Leftrightarrow$	一次独立なベクトルは最大３個 （４個以上のベクトルは必ず一次従属）※
	$\Leftrightarrow$	基本ベクトルは $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ の３個

補足. 一般に「n 次元空間では $n+1$ 個以上のベクトルは一次従属になるので，n 次元空間ではどんなベクトルも高々n 個のベクトルの一次結合として表現することができる」ということである．

1.2.3　一次従属について

n 次元の空間において，n 個[*4]の $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ が一次従属であるとすると，前述の通り，その中のベクトルで他で表せるものがある．一次独立になるベクトルを選び出し，その最大の個数を $k(<n)$ とする．

ここで,（添字を付け直して）$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k$ を一次独立とすると，$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ のすべてのベクトルは $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k$ のみで表せることになる．

これより，$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ の n 個のベクトルは，高々k 個のベクトルを用いて表現することができたので，k 次元空間のベクトルと見なせる．

つまり，一次従属であるベクトルどうしは，はじめ考えていた空間の次元 n よりも真に小さい k 次元の空間のベクトルと見ることができる．

このことを使いやすい形で書き直すと，次の性質になる：

性質.　② 平面において，$\vec{0}$ でない $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が一次従属

$\Leftrightarrow$ 高々１次元

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ は同一直線上にある．(注：直線は１次元空間)

$\Leftrightarrow$ $\vec{a} /\!/ \vec{b}$

[*4]次元より大きい数の個数のベクトルは必ず一次従属になるので，一次独立を考える場合，n 個のベクトルをとる場合には少なくとも n 次元の空間で考える必要がある．

したがって，

$$\vec{a}\text{ と }\vec{b}\text{が一次独立} \Leftrightarrow \vec{a}\text{ と }\vec{b}\text{は平行でない}$$

ということである．

③ 空間において，$\vec{0}$ でない $\vec{a}$ と $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が一次従属

$\Leftrightarrow$ 高々２次元

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にある．

したがって，

$$\vec{a}\text{ と }\vec{b}\text{ と }\vec{c}\text{が一次独立} \Longleftrightarrow \vec{a}\text{ と }\vec{b}\text{ と }\vec{c}\text{は同一平面上にない}$$

ということである．

1.2.4 ベクトルの分解

n 次元空間において，一次独立であるベクトルは最大で n 個なので，空間上のすべてのベクトルは，これら一次独立である n 個のベクトルの一次結合で表すことができる．このことを**ベクトルの分解**という．

性質. ベクトルの分解の各係数は一意に定まる．

証明. $\vec{b}$ が一次独立である $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ を用いて，

$$\vec{b} = p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 + \cdots p_n\vec{a}_n = q_1\vec{a}_1 + q_2\vec{a}_2 + \cdots q_n\vec{a}_n$$

と２通りに表せたとする．移項して整理すると，

$$(p_1 - q_1)\vec{a}_1 + (p_2 - q_2)\vec{a}_2 + \cdots + (p_n - q_n)\vec{a}_n = \vec{0}$$

となるが，$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ は一次独立なので，

$$p_1 - q_1 = p_2 - q_2 = \cdots = p_n - q_n = 0$$

つまり，

$$p_1 = q_1, \quad p_2 = q_2, \quad \cdots, \quad p_n = q_n$$

が成り立つので，$\vec{b}$ の表し方は一意に定まる．□

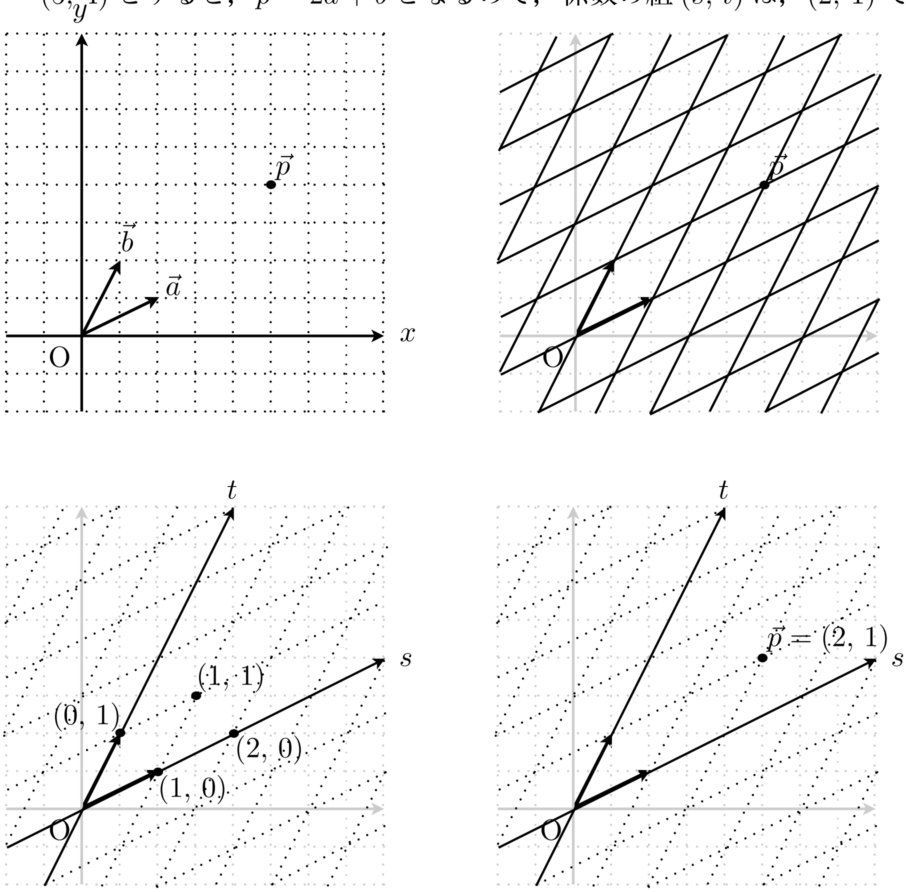
1.2.5　一次独立の一つの見方

平面上で 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立であるとすると，平面上のすべてのベクトル $\vec{p}$ は，s, t を用いて，$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表すことでできる．しかも，係数 s, t は $\vec{p}$ に対して一意的に定まる．

このとき，この係数の組 $(s,\ t)$ は一体何を表すのだろうか．

このことを，$\vec{a} = (2,\ 1)$, $\vec{b} = (1,\ 2)$ の場合を例にして考えてみる．

今，$\vec{p} = (5,\ 4)$ とすると，$\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ となるので，係数の組 $(s,\ t)$ は，$(2,\ 1)$ である．



このように，一般に次元個の一次独立なベクトルがあれば，座標（これを**斜交座標**という）を作ることができる．この座標での各点の座標の値が $(s,\ t)$ ということである．

さらに，基本ベクトルを $\vec{e}_1 = (1,\ 0)$, $\vec{e}_2 = (0,\ 1)$ とすると，$(x,\ y) = x(1,\ 0) + y(0,\ 1) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ となるので，普段使っている座標（直交座標）は，基本ベクトルによって得られた座標とみることができる．

1.2.6 一次独立の判定法

準備として，行列式を定義する．

定義 (行列式). $n \times n$ 個の数字を正方形に並べ $\left| \quad \right|$ で括ったものを行列式という．

② 2×2 では，$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ の形のもの，

③ 3×3 では，$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ の形のものである．

④ 4×4 以上でも同様である．

これら行列式の値の計算法を次のように帰納的に定義する：

② 2×2 では，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

と定義し，

③ 3×3 では一番上の行に注目して，次のように左から順に符号を $+$, $-$, $+$ と交互にして，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

と定義する．

④ 4×4 以上は③と同様に順に定義する．

補足. ① 1×1 の $|a_1|$ は数 a_1 そのもの，すなわち，$|a_1| = a_1$ と定義する．すると，実は②の 2×2 の定義は，③の 3×3 と同じであることに気が付くであろう．ただし，1×1 のこの表現は絶対値と同じで混乱するので，普通は用いない．

補足. 行列式の計算には良い性質があり，効率良く簡単に計算できる方法があるのだが，ここでは詳しくは触れない．とにかく今は，定義通り値を求めることができれば十分である．

例. ② $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) - 4 \times (-1) = -6 + 4 = -2$

③ $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \times (1 - 0) - 3 \times (2 - 0) + 2 \times (0 - 3) = 1 - 6 - 6 = -11$$

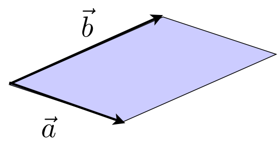
一次独立の判定法

次元個のベクトルが一次独立かどうかを判定するときに，次の考え方が本質となる．

② $\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立とは $\vec{a}, \vec{b}$ で平面がつくれる．(同一直線上にない)

$\Updownarrow$

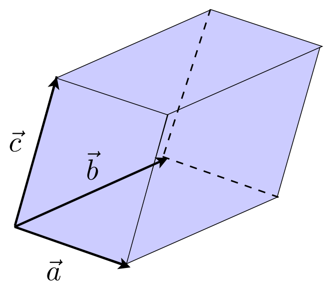
$\vec{a}, \vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積 $\neq 0$（潰れていない）



③ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が一次独立とは $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で空間がつくれる．(同一平面上にない)

$\Updownarrow$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で張られる平行六面体の体積 $\neq 0$（潰れていない）



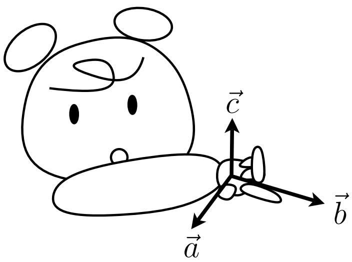
このように，一次独立かどうかの判定には，張られる平行四辺形の面積や平行六面体の体積を求めれば良いことになる．実は，行列式の性質として，行列式の値が平行四辺形の面積や平行六面の体積である，という非常に重要な性質がある．

定理 (行列式と平行四辺形・平行六面体).

② $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ に対し行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ の値は，$\vec{a},\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積を表す．ただし，$\vec{b}$ は $\vec{a}$ から見て正の角である．負の角のときは $-$ が付く．

③ $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ に対し行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ の値は $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で張られる平行六面体の体積を表す．ただし，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は右手系をなす順とする．左手系のときは $-$ が付く．

なお，３つのベクトルが**右手系をなす**とは，図のクマのように親指，人差し指，中指の向きの順に取ることである．ただし，$\vec{a},\vec{b}$ のなす角は劣角とする．



証明. ② 平行四辺形の面積 $=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ （詳細は 1.3.3 を参照.）より，

$$\begin{aligned}
\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2} &= \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_1)^2} \\
&= \sqrt{a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2} \\
&= \sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2} \\
&= |a_1b_2-a_2b_1| \\
&= |\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}|
\end{aligned}$$

符号について．$\vec{a}$ を x 軸上の正の部分にくるように全体を平行・回転移動する[*5]．このときの成分を，$\vec{a} = (a_1, 0)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ とする．なお，移動の仕方より，$a_1 > 0$ であり，また，$\vec{b}$ が $\vec{a}$ から見て正の角にあるときは $b_2 > 0$，負の角にあるときは $b_2 < 0$ である．このとき，

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2$$

より，$\vec{b}$ が $\vec{a}$ から見て正の角にあるときは $a_1 b_2 > 0$，負の角にあるときは $a_1 b_2 < 0$ となる．

③ 内積 $\cdot$ と 3 次元の外積 $\times$ を用いる．

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

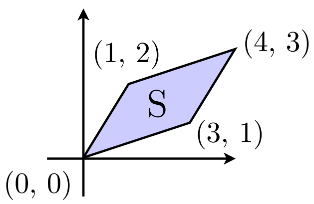
より証明できる．(詳細は 2.3 を参照.） □

以上のことをまとめると，次の重要な定理が成り立つ．

定理 (一次独立の判定法).

次元個のベクトルが一次独立 $\Longleftrightarrow$ それらを並べてつくられる行列式 $\neq 0$

例. (1) 平行四辺形の面積 S を求めよ．



$$S = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\ .$$

(2) 平面での 2 つのベクトル，$\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (4, -6)$ は一次独立か？

2 つのベクトルを並べた行列式の値を計算すると，

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 - 12 = -24 \neq 0$$

[*5] 平行・回転移動では，$\vec{a}$ から見たときの $\vec{b}$ のなす角は変化しないので一般性を失わない．

と，0 でないので一次独立.

それでは，$\vec{a}=(2,\,3)$, $\vec{c}=(4,\,6)$ ではどうか？

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12-12=-24=0$$

より一次従属．実際，$\vec{c}=2\vec{a}$ より，$\vec{a}/\!/\vec{c}$.

(3) 空間での 3 つのベクトル，$\vec{a}=(1,\,1,\,0)$, $\vec{b}=(2,\,0,\,1)$, $\vec{c}=(0,\,1,\,0)$ は一次独立か？

3 つのベクトルを並べた行列式の値を計算すると，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

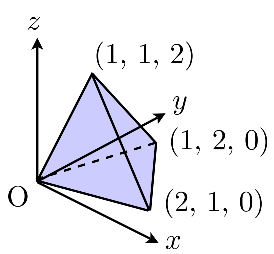
と，0 でないので一次独立.

空間では，一次独立である 3 つのベクトルの一次結合で，空間内のすべてのベクトルを表すことができるので，$\vec{p}=(1,\,5,\,-1)$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の一次結合で表すことを考える．$\vec{p}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ とおく．成分で表すと，$(1,\,5,\,-1)=(l+2m,\,l+n,\,m)$ より，各成分の連立方程式

$$\begin{cases} l+2m=1 \\ l+n=5 \\ m=-1 \end{cases}$$

を解くと，$l=3, m=-1, n=2$．よって，$\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ と表せた.

(4) 三角錐の体積 V を求めよ.



三角錐の各頂点を，

$$\vec{a}=(2,\,1,\,0),\ \vec{b}=(1,\,2,\,0),\ \vec{c}=(1,\,1,\,2)$$

とおく．底面は三角形なので，$\frac{1}{2}$，錐体なので $\frac{1}{3}$ を考慮して，

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\ .$$

1.3 内積

1.3.1 定義

定義. n 次元空間の２つのベクトル，$\vec{a}=(a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,\,b_2,\,\cdots,\,b_n)$ に対し，その**内積 $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}$** を,

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k}$$

で定義する.

具体的には,

① １次元では，$\vec{a}=a_1$, $\vec{b}=b_1$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1$ と普通の積と同じである.

② ２次元では，$\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\,b_2)$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ となる.

③ ３次元では，$\vec{a}=(a_1,a_2,\,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\,b_2,\,b_3)$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

いくつか補足をすると,

- 内積とは各成分の積の和であり，単なる値である．ベクトルではない.
- $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ でも $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ となることもある.
- 内積を $(\vec{a},\,\vec{b})$ や $(\vec{a}\,|\vec{b})$ などと書く人もいる.

1.3.2 性質

性質. $\vec{a}=(a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,\,b_2,\,\cdots,\,b_n)$, $\vec{c}=(c_1,\,c_2,\,\cdots,\,c_n)$ とする.

(i) （大きさ） $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

証明. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_ka_k=\sum_{k=1}^{n}a_k^2=|\vec{a}|^2$. □

補足. 大きさの性質より，$\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$ である.

(ii) （交換法則） $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

証明. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}b_ka_k=\vec{b}\cdot\vec{a}$. □

(iii)（分配法則） $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

証明. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\sum_{k=1}^{n}a_k(b_k+c_k)=\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k+a_kc_k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}a_kc_k=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.\ \square$$

(iv)（Cauchy–Schwarz の不等式）

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

等号は一方が $\vec{0}$ か $\vec{a}/\!/\vec{b}$ のとき.

証明. $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\geqq 0,\ |\vec{a}|\,|\vec{b}|\geqq 0$ より 2 乗して比べる．つまり，$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leqq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ を示せばよい.

$\vec{a}=\vec{0}$ のときは明らかに等号が成り立つので，$\vec{a}\neq\vec{0}$ の場合を考える.

今，t の多項式，$f(t)=|t\vec{a}+\vec{b}|^2$ を考える．大きさの 2 乗なので $f(t)\geqq 0$ である.

$$\begin{aligned} f(t) &= |t\vec{a}+\vec{b}|^2 \\ &= (t\vec{a}+\vec{b})\cdot(t\vec{a}+\vec{b}) \\ &= t^2\vec{a}\cdot\vec{a}+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2t^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}t+|\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

であり，すべての t において，

$$f(t)=|\vec{a}|^2t^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}t+|\vec{b}|^2\geqq 0$$

が成り立つので，これは，方程式 $f(t)=0$ の判別式を D とするとき，$D\leqq 0$ が必要十分条件である．したがって，

$$\frac{D}{4}=(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-|\vec{a}^2|\vec{b}|^2\leqq 0$$

したがって，

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leqq|\vec{a}^2|\vec{b}|^2$$

を得る.

等号は，$D=0$ のときなので，方程式 $f(t)=0$ が重解を持つときである．重解を $t=k$ とすると，$f(k)=|k\vec{a}+\vec{b}|^2=0$ より，$k\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

$k=0$ のときは $\vec{b}=\vec{0}$ となり等号が成り立つ．$k\neq 0$ のときは，$\vec{b}=-k\vec{a}$ より $\vec{a}/\!/\vec{b}$ を得る．$\square$

補足. (iv) の左辺の絶対値をはずすと，

$$-|\vec{a}|\,|\vec{b}| \leqq \vec{a}\cdot\vec{b} \leqq |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,.$$

となる．これより，$\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，不等式，

$$-1 \leqq \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \leqq 1$$

を得るが，これが表しているのは何であるか？

(v)　（内積の幾何的表現）　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とする[*6]．このとき，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

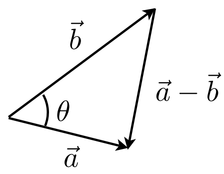
証明.

・$\theta = 0^\circ$ または 180° のときは，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ より，$\vec{b} = k\vec{a}$ と表せる．ここで，k の符号は $\cos\theta$ と同じであることに注意すると，$\vec{b} = \cos\theta|k|\vec{a}$ となる．よって，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\cos\theta|k|\vec{a} = |k||\vec{a}|^2\cos\theta = |\vec{a}||k\vec{a}|\cos\theta = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

となる．

・$0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき．図のような三角形を考える：



まず，内積の性質 (i) より，

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2\,.$$

一方，三角形に余弦定理を用いると，

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta\,.$$

２つの式をあわせて，

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

となるので，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta\,.$$

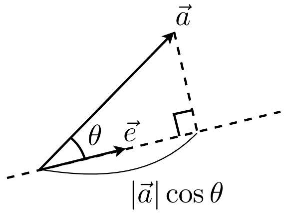
を得る．□

[*6] ２つのベクトルなので一つの平面内にある．したがって，角度を測ることができることに注意せよ．

補足. 特に $\vec{b}$ として，単位ベクトル $\vec{e}$ をとると，

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{a}| \cos\theta$$

となり，$\vec{a}$ の $\vec{e}$ 方向へ下ろしたとき（**正射影**という）の長さを表す.



(vi) **（垂直条件）** $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき，

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

証明. (v) と $\cos 90^\circ = 0$ より得る．□

1.3.3　内積の利用．射影・面積

<u>**正射影**</u>

性質. 互いに直交する単位ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots \vec{e}_n$ において．任意のベクトル $\vec{a}$ は，

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + \cdots + (\vec{a} \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n$$

と分解できる.

証明. 互いに直交する単位ベクトルは一次独立なので，任意のベクトル $\vec{a}$ は，

$$\vec{a} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + \cdots + p_n\vec{e}_n$$

と分解できる.

以下では，各係数 p_i が $p_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i \ (i = 1, \cdots n)$ と表せることを示す.

各 $\vec{e}_i$ においては，互いに直交する単位ベクトルなので，

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1, \qquad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \, (i \neq j)$$

が成り立つ．したがって，

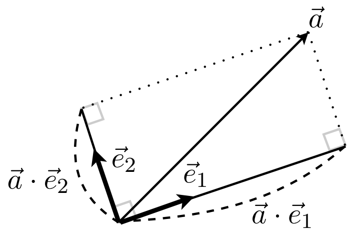
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{e}_i &= (p_1\vec{e}_1+p_2\vec{e}_2+\cdots+p_n\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_i \\ &= p_1\vec{e}_1\cdot\vec{e}_i+p_2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_i+\cdots+p_i\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i+\cdots+p_n\vec{e}_n\cdot\vec{e}_n \\ &= p_1\times 0+p_2\times 0+\cdots+p_i\times 1+\cdots+p_n\times 0 \\ &= p_i\end{aligned}$$

より，

$$p_1=\vec{a}\cdot\vec{e}_1,\quad p_2=\vec{a}\cdot\vec{e}_2,\quad \cdots,\quad p_n=\vec{a}\cdot\vec{e}_n$$

が成り立つ．□

図のように，各 $\vec{a}\cdot\vec{e}_i$ は，$\vec{a}$ を $\vec{e}_i$ 方向へ正射影したときの長さを表す．



面積

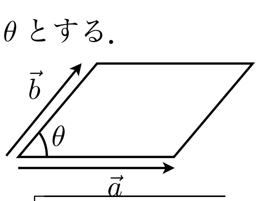
性質. 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積 S は，

$$S=\sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

で与えられる．

注：平面のときは行列式でも求まる．

証明. 図のように，$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とする．



$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)^2}=\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

より，

$$S=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta=\sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\quad.\qquad\square$$

第2章　ベクトルと図形

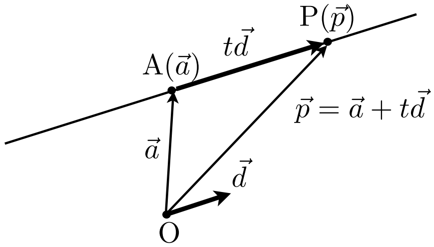
2.1　直線・分点

2.1.1　直線のベクトル方程式

まず，点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{d}$ と平行な直線を考える．直線上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は，実数 t を用いて，

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

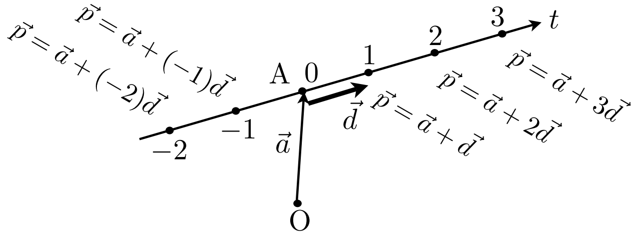
と表すことができる．



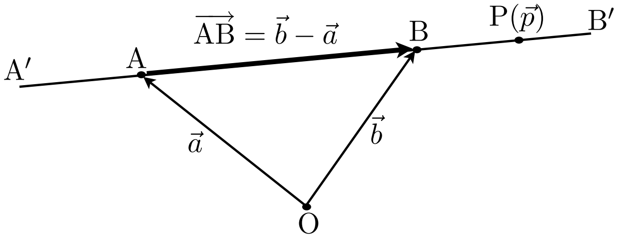
このとき，t を**パラメータ，媒介変数，助変数**などという．

補足. 直線は 1 次元の図形なのでパラメータは 1 つで表せる．
一般に，図形の次元 = パラメータの数（自由度という）

$t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ のところに目盛りを入れると物差しのようになる．これは座標を入れることと同じ．(座標が t 1 つなので 1 次元)



次に，2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線を考える．



直線の方向ベクトルとして $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ ととると，直線上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は実数 t を用いて，

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

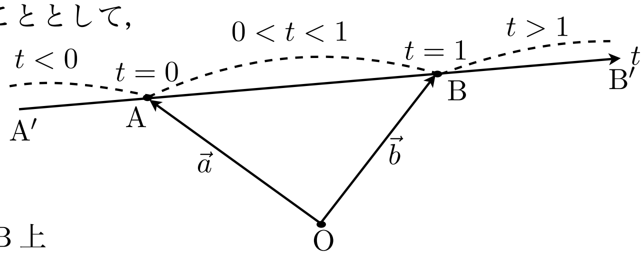
と表すことができる．

補足. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数の **和が 1** になることに注意せよ．したがって，

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, \quad t + s = 1$$

のとき直線を表す．かなり重要な性質．

目盛りを入れてみると直ぐにわかることとして，



- $t = 0$ のとき，点 P は点 A 上
- $t = 1$ のとき，点 P は点 B 上
- $0 < t < 1$ のとき，点 P は線分 AB 上
- $t < 0$ のとき，点 P は半直線 AA′ 上
- $t > 1$ のとき，点 P は半直線 BB′ 上

である．これより，$0 < t < 1$ のとき，点 P は線分 AB の内分点，$t < 0, t > 1$ のとき，点 P は線分 AB の外分点になることがわかる．

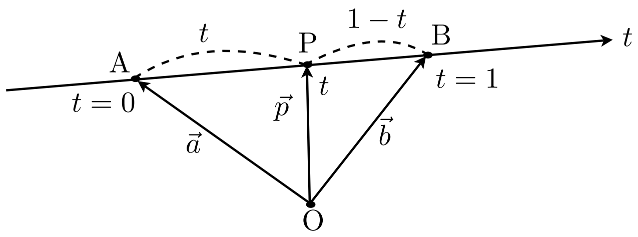
以下，しばらくは直線から離れるが，分点（内分点・外分点）について詳しく見ていく．

2.1.2　分点

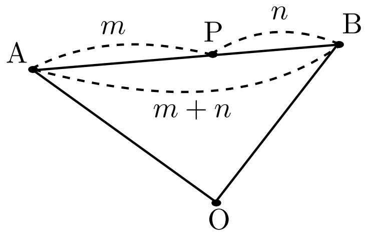
内分

内分点（$0 < t < 1$）について．

$0 < t < 1$ のとき，点 P は線分 AB を $t : (1-t)$ の比に内分する点とわかる．



また，線分 AB を $m:n$ の比に内分する点を P とすると，



であるので，$\dfrac{m}{m+n}+\dfrac{n}{m+n}=1$（和が 1）を考慮すると，$t=\dfrac{m}{m+n}$，　$1-t=\dfrac{n}{m+n}$ となる．よって，$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ に代入して，

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

と表せる．まとめると，

性質 (内分). $0<t<1$ $(\Leftrightarrow 0<1-t<1)$ のとき，

・線分 AB を $t:(1-t)$ の比に内分する点 P は，

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

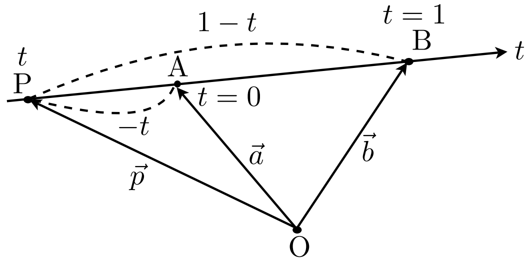
・線分 AB を $m:n$ の比に内分する点 P は，

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

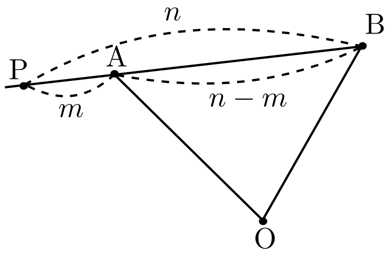
外分

外分点（$t<0$, $t>1$）について．

まず，$t<0$ のとき．点 P は線分 AB を $(-t):(1-t)$ の比に外分する点とわかる．



また，線分 AB を $m:n\ (m<n)$ の比に外分する点を P とすると，



であるので，分母を $m-n$ にし，符号に注意すると，$t:(1-t)=\dfrac{m}{m-n}:\dfrac{-n}{m-n}$ となるので[*1]，$\dfrac{m}{m-n}+\dfrac{-n}{m-n}=1$（和が 1）を考慮すると，

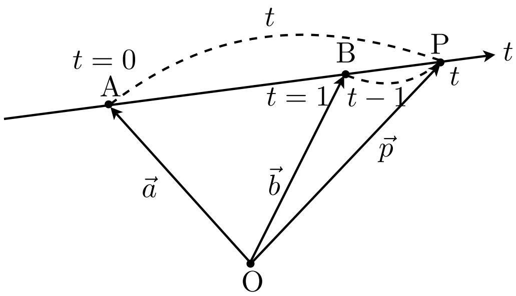
$$t=\frac{m}{m-n},\quad 1-t=\frac{-n}{m-n}$$

となる．よって，$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ に代入して，

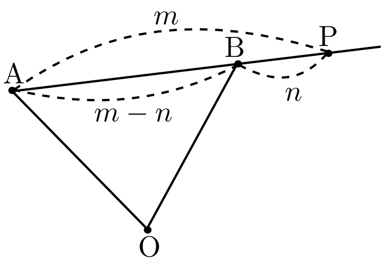
$$\vec{p}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

と表せる．

次に，$t>1$ のとき．点 P は線分 AB を $t:(t-1)$ の比に外分する点とわかる．



また，線分 AB を $m:n\ (m>n)$ の比に外分する点を P とすると，



[*1] 念のため．途中の計算は，$(-t):(1-t)=m:n=\frac{m}{n-m}:\frac{n}{n-m}=\frac{-m}{m-n}:\frac{-n}{m-n}$

であるので，符号に注意すると，$t:(1-t)=\dfrac{m}{m-n}:\dfrac{-n}{m-n}$ となるので，$\dfrac{m}{m-n}+\dfrac{-n}{m-n}=1$（和が 1）を考慮すると，

$$t=\frac{m}{m-n},\quad 1-t=\frac{-n}{m-n}$$

となる．よって，$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ に代入して，

$$\vec{p}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

と表せる．まとめると，

性質 (外分). $t<0$ または $t>1$ のとき，

・線分 AB を $(-t):(1-t)\ \big(=t:(t-1)\big)$ の比に外分する点 P は，

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

・線分 AB を $m:n\ (m\neq n)$ の比に外分する点 P は，

$$\vec{p}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

※ 形式上，$m:(-n)$ の内分と考えることができる．

例. $\triangle$ABC において，$7\overrightarrow{\mathrm{PA}}+20\overrightarrow{\mathrm{PB}}+15\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ をみたす点 P の位置を答えよ．

平面上の点はすべて一次独立である 2 つのベクトルで表すことができるので，点 A を基準にして，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表すことを考える．

条件の式より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{20\overrightarrow{\mathrm{AB}}+15\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{42}$$

となる．内分外分を考えるので，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の係数の和が 1 になるように，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{35}{42}\cdot\frac{20\overrightarrow{\mathrm{AB}}+15\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{35}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}.$$

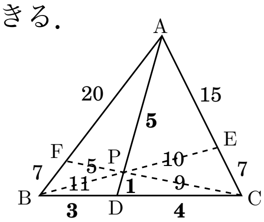
と変形する．ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$$

とおいた．

この式より，点 D は辺 BC を 3 : 4 に内分した点であり，点 P は線分 AD を 5 : 1 に内分した点[*2]であることがわかる．

もし，点 A ではなく，点 B や C を基準にした場合は，答え方が異なる．メネラウスの定理とチェバの定理を用いると，次の図のように確認することができる．



例. 四面体 OABC において，$4\overrightarrow{\mathrm{OP}}+9\overrightarrow{\mathrm{AP}}+6\overrightarrow{\mathrm{BP}}+5\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ をみたす点 P の位置を答えよ．

三角形と同様に考える．ただし空間なので，点 O を基準にして，1 次独立である 3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表すことを考える．

条件の式より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{9\overrightarrow{\mathrm{OA}}+6\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{40}$$

となる．次に 3 つの辺 AB, BC, CA のどの辺からはじめるかで答え方が異なるのだが，求めた答えが正しいのかどうかの確認の方法は三角形のときと同様に，メネラウスの定理やチェバの定理を用いればよい．

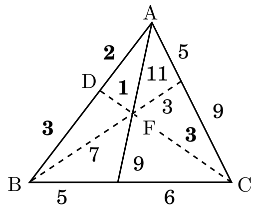
ここでは，辺 AB からはじめる．

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{15\cdot\frac{9\overrightarrow{\mathrm{OA}}+6\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{15}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{40} \\
&= \frac{3\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{8} \\
&\quad (\text{ここで } \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\tfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5} \text{ として}) \\
&= \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{8} \\
&= \frac{4}{8}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4} \\
&\quad (\text{ここで } \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\tfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4} \text{ として}) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OF}}.
\end{aligned}$$

[*2] $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の内分比がわかりにくい場合，$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AA}}+5\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{6}$ と見ればわかりやすい．

よって，辺 AB を $2:3$ の比に内分する点を D，線分 DC を $1:3$ の比に内分する点を F とするとき，線分 OF の中点が P である．

ちなみに，底面の三角形は図のようになっている．



応用

$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ は $t + s = 1$ のとき直線になるが，この t と s を用いた表し方と分点との関係について考える．

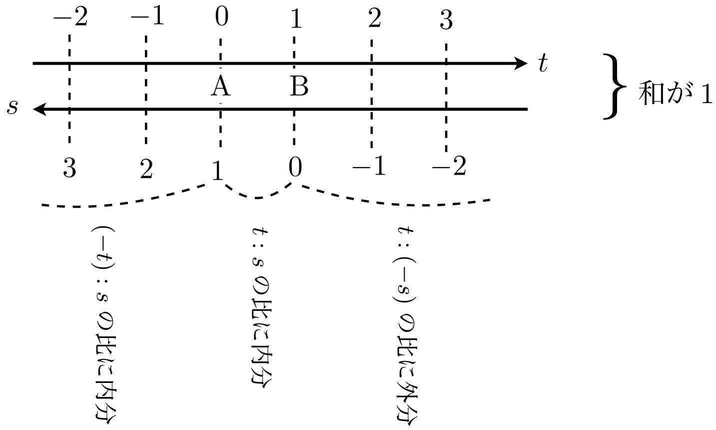
$t + s = 1$ より，

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} = \frac{s\vec{a} + t\vec{b}}{t + s}$$

であるので，$t > 0,\ s > 0$ のときは，点 P は線分 AB を $t : s$ の比に内分する点である．

$t < 0$ または $s < 0$ のときは，点 P は線分 AB を $|t| : |s|$ の比に外分する点である．

t と s の関係は，次の図でとらえるとわかりやすいだろう．



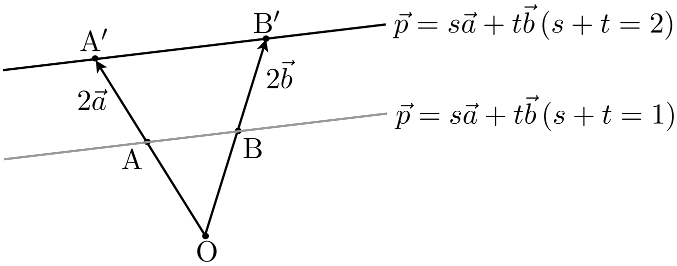
$s = 1 - t$ とすれば，$\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$ となり，点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を基準にして，点 $\mathrm{B}(\vec{b})$ 方向に目盛りをふった直線であり，
$t = 1 - s$ とすれば，$\vec{p} = s\vec{a} + (1 - s)\vec{b}$ となり，点 $\mathrm{B}(\vec{b})$ を基準にして，点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ 方向に目盛りをふった直線となる．

次に，$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ で $t + s = 1$ でない場合について考えてみる．

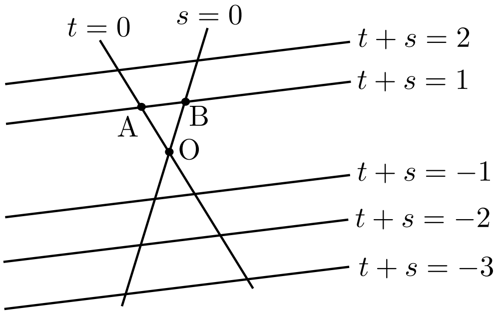
例えば，$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b},\ t + s = 2$ についてみてみよう．

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} = 2\frac{s\vec{a} + t\vec{b}}{t + s} = \frac{s(2\vec{a}) + t(2\vec{b})}{t + s}$$

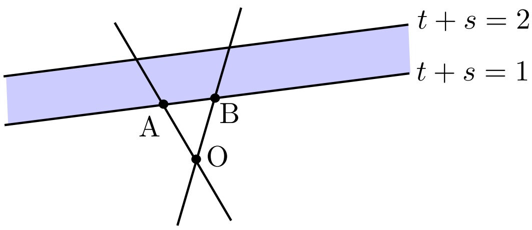
とすることで，点 P は，$2\vec{a}$, $2\vec{b}$ をそれぞれ位置ベクトルとする 2 点 A′, B′ を通る直線上の点であることがわかる．したがって，$t > 0$, $s > 0$ なら線分 A′B′ の内分点，$t < 0$ または $s < 0$ なら線分 A′B′ の外分点になる．



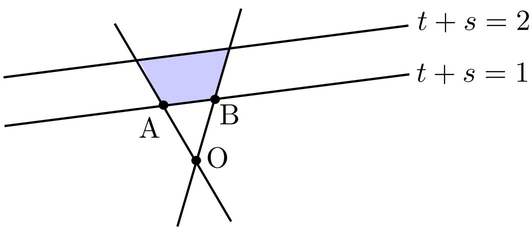
$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ で $t + s$ が様々な値をとるときの様子もみておこう．



さらに，$t + s$ が, 例えば，$1 < t + s < 2$ のように範囲で与えられた場合に表す図形も考えることができる．この場合，$t + s = 1$ の直線と $t + s = 2$ の直線に挟まれた領域になる．(ただし，境界を含まない.)



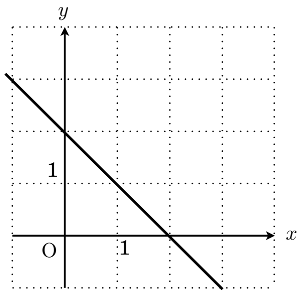
さらに，$t + s = 2$, $t > 0$, $s > 0$ のように，$t > 0$, $s > 0$ と条件がついた場合は内分点を表すので，下の図の領域になる．(ただし，境界を含まない.)



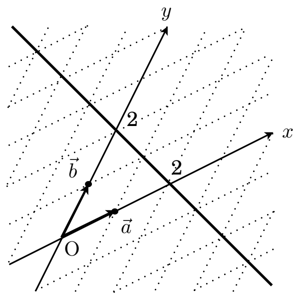
以上のことを本質的に理解するには，1.2.5 節でみた斜交座標の考え方でみると良い．

$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ において，$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので，係数の組 (s, t) は，$\vec{a}, \vec{b}$ によって作られた座標平面の座標となる．ここで，(s, t) を (x, y) を書き換えてみるとわかりやすくなる．

例えば，$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $x + y = 2$ のとき，(x, y) を座標と見れば，条件 $x + y = 2$ は直線に見える．実は，これで正しいのである．単に $x + y = 2$ が直線である，というと，



をイメージするが，この座標は直交座標であり，$\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$ と基本ベクトルであるときの特別な座標であるというだけである．この点に注意すれば，$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $x + y = 2$ が次のようになることは，明らかであろう．



2.1.3　直線の方程式（続き）

<u>**成分表示と直線の方程式**</u>

② $\vec{p} = (x, y)$, $\vec{a} = (a, b)$, $\vec{d} = (l, m)$ とするとき，

$$\begin{cases} x = a + tl \\ y = b + tm \end{cases}$$

となる．これを直線のパラメータ（媒介変数）表示という．

$l \neq 0$, $m \neq 0$ のとき，

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} (= t)$$

これを直線の方程式という．(パラメータを消した式のこと．)

逆に，式をこの形に変形すれば，点 $(a,\, b)$ を通り，方向ベクトル $(l,\, m)$ の直線とわかる．

なお，例えば，$l=0,\ m\neq 0$ のとき，直線の方程式は，

$$x=a, \qquad (y\text{ はすべての実数})$$

となる．

補足. 平面では通常，直線の方程式は，$y=ax+b$ や，$ax+by+c=0$ の形にする．

③ $\vec{p}=(x,\, y,\, z),\ \vec{a}=(a,\, b,\, c),\ \vec{d}=(l,\, m,\, n)$ とするとき，

$$\begin{cases} x=a+tl \\ y=b+tm \\ z=c+yn \end{cases}$$

となる．これを直線のパラメータ（媒介変数）表示という．

$l\neq 0,\ m\neq 0,\ n\neq 0$ のとき，

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}(=t)$$

これを直線の方程式という．(パラメータを消した式のこと．)

逆に，式をこの形に変形すれば，点 $(a,\, b,\, c)$ を通り，方向ベクトル $(l,\, m,\, n)$ の直線とわかる．

なお，例えば，$l=0,\ m\neq 0,\ n\neq 0$ のとき，直線の方程式は，

$$x=a,\ \frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}\ ,$$

$l=m=0,\ n\neq 0$ のときは，

$$x=a,\ y=b, \qquad (z\text{ はすべての実数})$$

となる．

補足. 直線は 1 次元の図形なので，

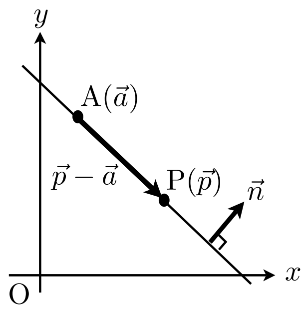
②平面では「平面の 2 次元 − 直線の 1 次元 = 方程式が 1 つ」となり，

③空間では「空間の３次元 − 直線の１次元 = 方程式が２つ」となる．

したがって，図形そのものの性質を表すパラメータを含むベクトル方程式は，平面でも空間でも同じ形をしているが，パラメータを含まない直線の方程式が平面と空間で異なるのはこのためである．

同様に，空間の中で方程式が１つで表される図形は「空間の３次元 − 方程式が１つ ＝ ２次元の図形」なので，平面となる．したがって，②平面での「直線」と③空間での「平面」は非常に似た性質がある．このことを意識することが理解を深めるポイントである．

法線ベクトル（平面のみ）



点 A($\vec{a}$) を通り，$\vec{n}$ に垂直な直線上の点 P($\vec{p}$) は，

$$\vec{n} \perp (\vec{p}-\vec{a})$$

より，

$$\vec{n} \cdot (\vec{p}-\vec{a}) = 0$$

をみたす．この式を**平面上の直線のベクトル方程式**という．

$\vec{p}=(x,\, y),\ \vec{a}=(a,\, b),\ \vec{n}=(l,\, m)$ とするとき，

$$(l,\, m)\cdot(x-a,\, y-b)=0$$

より，

$$l(x-a)+m(y-b)=0\ .$$

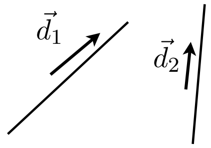
整理して，

$$lx+my+n=0 \quad (\text{ただし}\, n=-al-bm\, \text{とした})$$

となり，平面上の直線の方程式の一般形が得られる．

一般形に変形すれば，$x,\, y$ の係数 $(l,\, m)$ が直線の法線ベクトルである．

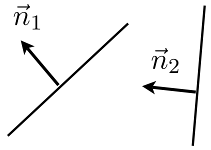
応用１：２直線のなす角



方法１　方向ベクトル $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ で考える．(平面，空間ともにＯＫ)

方法２　法線ベクトル $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ で考える．(ただし，平面のみ)

応用２：(平面のみ)



直線 $lx + my = 0$ に対し，

・この直線に平行で点 $(a,\, b)$ を通る直線は，

$$l(x-a) + m(y-b) = 0$$

で求まる．(法線が平行)

・この直線に垂直で点 $(a,\, b)$ を通る直線は，$(l,\, m) \perp (-m,\, l)$ より，

$$-m(x-a) + l(y-b) = 0$$

で求まる．(法線が垂直)

補足. 法線での方法が空間では使えないことについて．

直線の方程式は，$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ より，$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{d}$ となるので，方向ベクトルと垂直なベクトルを $\vec{n}$ とし，その内積を考えると，

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a}) = \vec{n}\cdot(t\vec{d}) = 0$$

となる．この関係式は，平面でも空間でも成り立つので，空間でも $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a}) = 0$ は直線を表す式のように誤解してしまいがちである．しかしながら，この式からいえることは，

$$\text{直線} \Longrightarrow \vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a}) = 0$$

であり，逆の

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0 \Longrightarrow \text{直線}$$

は真ではない．平面のみ逆も成り立つということである．

詳しくは，②平面では，

$$② \qquad \text{直線} \Longleftrightarrow \vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

であり，③空間では，

$$③ \qquad \text{平面} \Longleftrightarrow \vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

である．空間では，直線 は 平面 に含まれるので，

$$\text{直線} \Longrightarrow \text{平面} \Longleftrightarrow \vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

ということである．

点と直線の距離

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}$ である直線 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ と点 $\mathrm{Q}(\vec{q})$ との距離を考える．

方法 1　点 $\mathrm{Q}(\vec{q})$ との距離が最小となる直線上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ が求まればよいので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2=|\vec{q}-\vec{p}|^2=|\vec{q}-(\vec{a}+t\vec{d})|^2$$

が最小となる t を求めればよい．この式は t の 2 次式となるので，単に 2 次式の最小値問題である．

例. $\vec{a}=(9,\,-1,\,0),\ \vec{d}=(-4,\,3,\,1),\ \vec{q}=(-2,\,1,\,2)$ のとき．

$\vec{p}=(9-4t,\,-1+3t,\,t)$ より，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 &= |\vec{q}-\vec{p}|^2\\ &= |(-2,\,1,\,2)-(9-4t,\,-1+3t,\,t)|^2\\ &= |(-11+4t,\,2-3t,\,2-t)|^2\\ &= (-11+4t)^2+(2-3t)^2+(2-t)^2\\ &= 26t^2-104t+129\\ &= 26(t-2)^2+25\,.\end{aligned}$$

したがって，$t=2$ のとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ は最小値をとる．$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| \geqq 0$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$ も $t=2$ で最小値をとる．よって，点と直線の距離は $\sqrt{25}=5$.

方法２　点 $\mathrm{Q}(\vec{q})$ との距離が最小となる直線上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \vec{d}$ であるので，

$$\vec{d} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \vec{d} \cdot (\vec{q} - \vec{p}) = \vec{d} \cdot \{\vec{q} - (\vec{a} + t\vec{d})\} = 0$$

となる t を求めればよい．この式は t の１次式なので簡単に求まる．

例. $\vec{a} = (9,\ -1,\ 0)$, $\vec{d} = (-4,\ 3,\ 1)$, $\vec{q} = (-2,\ 1,\ 2)$ のとき．

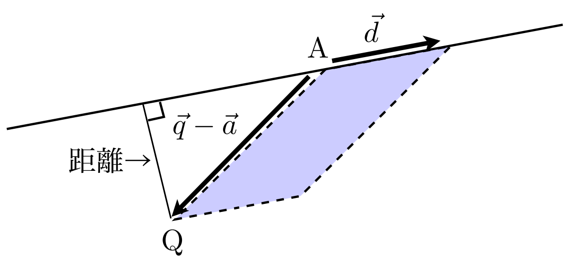
$\vec{p} = (9 - 4t,\ -1 + 3t,\ t)$ より，

$$\begin{aligned} \vec{d} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \vec{d} \cdot (\vec{q} - \vec{p}) \\ &= (-4,\ 3,\ 1) \cdot \{(-2,\ 1,\ 2) - (9 - 4t,\ -1 + 3t,\ t)\} \\ &= (-4,\ 3,\ 1) \cdot (-11 + 4t,\ 2 - 3t,\ 2 - t) \\ &= 44 - 16t + 6 - 9t + 2 - t \\ &= -26t + 52 = 0 \end{aligned}$$

したがって，$t = 2$ のとき，$\vec{d} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$ となる．$\mathrm{P}(1,\ 5,\ 2)$, $\mathrm{Q}(-2,\ 1,\ 2)$ より，点と直線の距離は $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = 5$.

以上２つの方法は，直線のベクトル方程式から導いているので，平面でも空間でも用いることができる．

方法３　直線 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ と点 $\mathrm{Q}(\vec{q})$ との距離は，図のように $\vec{q} - \vec{a}$ と $\vec{d}$ で張られる平行四辺形の高さなので，次の式で与えられる．



$$(\text{距離}) = (\text{高さ}) = \frac{(\text{面積})}{(\text{底辺の長さ})} = \frac{|(\vec{q} - \vec{a}) \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}.$$

なお，右辺の分子にある「×」は，2.2 節で定義する外積である．

例. $\vec{a}=(9,\,-1,\,0),\ \vec{d}=(-4,\,3,\,1),\ \vec{q}=(-2,\,1,\,2)$ のとき．

$$(\vec{q}-\vec{a})\times\vec{d}=(-11,\,2,\,2)\times(-4,\,3,\,1)=(-4,\,3,\,-25)\,,$$

より，距離は，$\dfrac{|(-4,\,3,\,-25)|}{|(-4,\,3,\,1)|}=\dfrac{\sqrt{650}}{26}=5.$

平面上の点 $\mathrm{Q}(p,\,q)$ を空間内の点 $\mathrm{Q}(p,\,q,\,0)$ とみなす（同一視）することにより，平面でも外積を考えることができる．平面内の２つのベクトルの外積は平面の法線なので，平面内の成分を持たないが，その大きさは，２つのベクトルが貼る平行四辺形の面積なので，この公式がそのまま使える．

例. $\vec{a}=(9,\,-1),\ \vec{d}=(-4,\,3),\ \vec{q}=(-2,\,1)$ のとき．
$\vec{a}=(9,\,-1,\,0),\ \vec{d}=(-4,\,3,\,0),\ \vec{q}=(-2,\,1,\,0)$ として，

$$(\vec{q}-\vec{a})\times\vec{d}=(-11,\,2,\,0)\times(-4,\,3,\,1)=(0,\,0,\,-25)\,,$$

より，距離は，$\dfrac{|(0,\,0,\,-25)|}{|(-4,\,3,\,0)|}=\dfrac{25}{5}=5.$

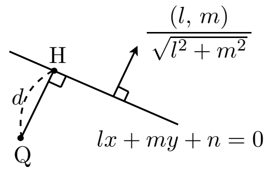
方法４　さらに，平面には次の点と直線との距離の公式がある．

定理 (平面上の点と直線との距離).

平面上で，点 $\mathrm{Q}(p,\,q)$ と直線 $lx+my+n=0$ との距離 d は，

$$d=\frac{|\,lp+mq+n\,|}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

で与えられる．



証明. 点 Q から直線に下ろした垂線の足を H とする．
直線の単位法線ベクトルは $\dfrac{(l,\,m)}{\sqrt{l^2+m^2}}$ であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\frac{(l,\,m)}{\sqrt{l^2+m^2}}=\left(p+t\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}},\ q+t\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)$$

と表せる．

このとき，点 Q と直線との距離は，単位法線ベクトルを考えているので，$d=|t|$ であることに注意する．

点 H は直線上の点なので，直線の式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
l\left(p+t\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)+m\left(q+t\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)+n &= lp+mq+n+t\frac{l^2+m^2}{\sqrt{l^2+m^2}} \\
&= lp+mq+n+t\sqrt{l^2+m^2}=0\,.
\end{aligned}
$$

したがって，

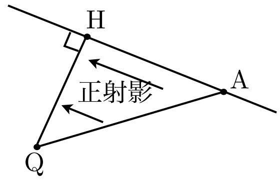
$$
d=|t|=\left|-\frac{lp+mq+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right|=\frac{|\,lp+mq+n\,|}{\sqrt{l^2+m^2}}\,. \qquad \square
$$

例. 直線 $3x+4y-23=0$ と点 $(-2,\,1)$ の距離を求める．

$$
\frac{|\,3\cdot(-2)+4\cdot1-23\,|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\frac{|-25|}{5}=5\,.
$$

方法 5　点 Q から直線に下ろした垂線の足を H とすると，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}$ は直線と垂直であるので，直線上の任意の点 A に対し，$\overrightarrow{\mathrm{QA}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{QH}}$ 方向への正射影の長さが点と直線の距離である．点 H のとり方から，その値は $\left|\overrightarrow{\mathrm{QH}}\right|$ である．

正射影の長さは，単位ベクトルとの内積で求まるので，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}$ ではなく直線の単位法線ベクトルで考えれば十分である．よって，直線の式が $lx+my+n=0$ のとき，



$$
d=\left|\overrightarrow{\mathrm{QH}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\frac{(l,\,m)}{\sqrt{l^2+m^2}}\right|\,.
$$

例. 直線 $3x+4y-23=0$ と点 $(-2,\,1)$ の距離を求める．

直線上の点 A として，A(5, 2) をとると，$\overrightarrow{\mathrm{QA}}=(7,\,1)$ より，

$$
d=\left|(7,\,1)\cdot\frac{(3,\,4)}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=5\,.
$$

補足. 空間では，$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ はどのような図形か？

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り $\vec{n}$ に垂直な平面を表す．

「平面での直線」と「空間での平面」（と「直線での点」）は似ている＝次元 -1 の図形）

2.2　空間での平面

外積

空間内の平面を扱う上で非常に有用なものに外積がある．

定義 (外積). 空間内の２つのベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ において，$\vec{a}, \vec{b}$ の**外積** $\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ を次の式で定義する．

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

性質.　(1) $\vec{a}\perp(\vec{a}\times\vec{b})$, $\vec{b}\perp(\vec{a}\times\vec{b})$. [*3]

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$ は右手系をなす．

(3) $|\vec{a}\times\vec{b}|$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積を表す．

すなわち，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$.

証明.　(1) 垂直であること：

単に計算して 0 になることを示すだけなのだが，ここでは，行列式との関係がわかる証明法を紹介する．

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=a_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

したがって，$\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$. 同様にして，

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

より，$\vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}$.

[*3] 正確には「内積が 0」なのだが，垂直であることを強調した表現にした.「$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$ が $\vec{0}$ でないならば」という条件をつければよいが，これもまた煩わしい．

(2) 右手系であること：

$\vec{a}$ を x 軸上の正の部分に，$\vec{b}$ を xy 平面上で，第１，２象限にくるように全体を平行・回転移動する．このときの成分を，$\vec{a} = (a_1,\, 0,\, 0)$, $\vec{b} = (b_1,\, b_2,\, 0)$ とする．なお，移動の仕方より，$a_1 > 0, b_2 > 0$ である．このとき，

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0,\, 0,\, a_1 b_2)$$

となり，$a_1 b_2 > 0$ より，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ は右手系をなすことがわかる．

(3) 大きさが平行四辺形の面積になること：

$$
\begin{aligned}
|\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
&= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \\
&\quad -2a_2 a_3 b_2 b_3 - 2a_3 a_1 b_3 b_1 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\
&\quad +a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 \\
&\quad \text{（上２行の式は展開しただけ．３行目の式がポイント）} \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
&= |\vec{a}|^2\, |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2
\end{aligned}
$$

$|\vec{a} \times \vec{b}| \geqq 0$ より，$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2\, |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |\vec{a}|\, |\vec{b}| \sin\theta\,.$ □

補足. 平面上の２つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\, a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\, b_2)$ を空間上のベクトル $\vec{a} = (a_1,\, a_2,\, 0)$, $\vec{b} = (b_1,\, b_2,\, 0)$ とみなすと，

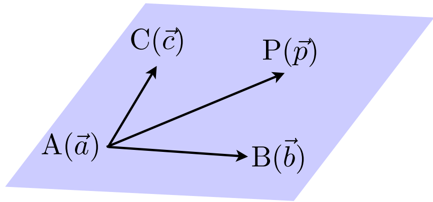
$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(0,\, 0,\, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) \qquad \text{より，} \qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = \left|\, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \,\right| = S$$

となり，平面上の平行四辺形の面積の公式に等しい．

平面のベクトル方程式（媒介変数表示）

同一直線上にない３点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) の定める平面上の点を P($\vec{p}$) とする．２つのパラメータ s, t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



と表せる．よって，

$$\vec{p} - \vec{a} = s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$$

より，

$$\vec{p} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

となる．これを平面のベクトル方程式という．

あるいは，

$$\vec{p} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \qquad (r + t + s = 1)$$

でも同じ．

補足． ２点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を通る直線上の点 P($\vec{p}$) が，

$$\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$$

あるいは，

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \qquad (t + s = 1)$$

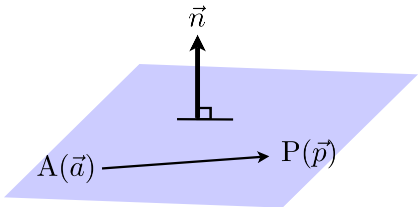
で表せるのと似ている．

平面は２次元なのでパラメータは s, t の２つ，直線は１次元なのでパラメータは t の１つ．

平面の方程式

点 A($\vec{a}$) を通り $\vec{n}$ に垂直な平面上の点 P($\vec{p}$) は，

$$\vec{n} \perp (\vec{p} - \vec{a})$$



より，

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

をみたす．

$\vec{p} = (x,\, y,\, z)$, $\vec{a} = (a,\, b,\, c)$, $\vec{n} = (l,\, m,\, n)$ とするとき，

$$(l,\, m,\, n) \cdot (x - a,\, y - b,\, z - c) = 0$$

より，

$$l(x - a) + m(y - b) + n(z - c) = 0\,.$$

整理して，

$$lx + my + n + p = 0 \quad (\text{ただし } p = -al - bm - cn \text{ とした})$$

これを，平面の方程式という．

補足. 平面の方程式の x, y, z の係数

$$(l,\, m,\, n)$$

は平面の法線ベクトルになる．

補足. 平面での直線の式に似ている． どちらも次元－1の図形

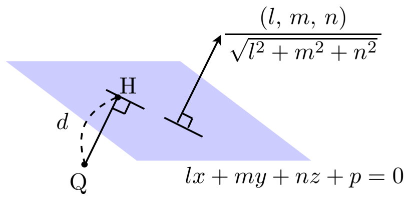
点と平面との距離

定理. 点 $\mathrm{Q}(p,\, q,\, r)$ と平面 $lx + my + nz + k = 0$ との距離 d は，

$$d = \frac{|lp + mq + nr + k|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

で与えられる．

補足. 平面上の天と直線の距離の方法4と比較せよ．



証明. 点 Q から平面に下ろした垂線の足を H とする．
直線の単位法線ベクトルは $\dfrac{(l,\, m,\, n)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$ であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + t\frac{(l,\, m,\, n)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \left(p + t\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}},\ q + t\frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}},\ r + t\frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2}}\right)$$

と表せる．

このとき，点 Q と直線との距離は，単位法線ベクトルを考えているので，$d = |t|$ であることに注意する．

点 H は平面上の点なので，平面の式に代入すると，

$$l\left(p+t\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)+m\left(q+t\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)+n\left(r+t\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)+k$$

$$=lp+mq+nr+k+t\frac{l^2+m^2+n^2}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$=lp+mq+nr+k+t\sqrt{l^2+m^2+n^2}=0\,.$$

したがって，

$$d=|t|=\left|-\frac{lp+mq+nr+k}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right|=\frac{|\,lp+mq+nr+k\,|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\,. \qquad \square$$

例. 4 点 A(3, 4, 5), B(2, 7, 7), C(5, 2, 6), D(x, −10, 5) は同一平面上にあるとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の一次結合で表わせ．

まず，点 A を基準にとり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる s, t を求める．

$$(x-3,\,-14,\,0)=s(-1,\,3,\,2)+t(2,\,-2,\,1)$$

より，

$$\begin{cases} x-3 &= -s+2t \\ -14 &= 3s-2t \\ 0 &= 2s+t \end{cases}.$$

したがって，$s=-2,\ t=4,\ (x=13)$．よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,.$$

これより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}\,.$$

ちなみに $x=13$．

(2) 外積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

定義より，

$$(-1,\,3,\,2)\times(2,\,-2,\,1)=(7,\,5,\,-4)\,.$$

(3) **(2)** を用いて，３点 A, B, C を通る平面の方程式を求めよ．

法線ベクトルとして，$\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ がとれるので，$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ より，

$$(7,\ 5,\ -4) \cdot (x-3,\ y-4,\ z-5) = 7x + 5y - 4z - 21 = 0\,.$$

(4) **(2)** を用いて，△ABC の面積を求めよ．

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \frac{1}{2}\left|(7,\ 5,\ -4)\right| = \frac{3\sqrt{10}}{2}\,.$$

(5) 内積を用いて，△ABC の面積を求めよ．

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14 \cdot 9 - 6^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}\,.$$

(6) 行列式を用いて，３点 A, B, C を通る平面の方程式を求めよ．

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ平面上にあるということは，これら 3 つのベクトルが一次従属ということなので，行列式が 0 が条件である．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-3,\ y-4,\ z-5),\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 3,\ 2),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2,\ -2,\ 1)$ より，

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 7(x-3) + 5(y-4) - 4(z-5) = 0$$

したがって，$7x + 5y - 4z - 21 = 0$ となる．

(7) 点 $(2,\ 4,\ -3)$ と 3 点 A, B, C を通る平面との距離 d を求めよ．

$$d = \frac{|7 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 4 \cdot (-3) - 21|}{\sqrt{49 + 25 + 16}} = \frac{25}{3\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{6}\,.$$

補足. 上の例の (3) と (6) を比較すると，次のことに気がつくだろう．

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ の成分を並べてできる行列式を，ここでは $\Delta(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ と書くことにすると，

$$\Delta(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

が成り立つ．この関係式を用いると，行列式が平行六面体の体積を表すことが容易に証明できる．

2.3 平行六面体の体積が行列式で与えられることについて

外積を定義したので，ここで，平行六面体の体積が行列式で与えられることの証明をする．なお，まだベクトルに不慣れな場合は，この節は読み飛ばしても構わない．

定理. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ とするとき，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で張られる平行六面体の体積は,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

で与えられる．

証明.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= (a_1, a_2, a_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \end{aligned}$$

ここで，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ で張られる平行四辺形の単位法線ベクトルを $\vec{n}$ とする：

$$\vec{n} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

ととる．すると，

$$\vec{a} \cdot \vec{n}$$

は平行六面体の高さを与える．

また，$|\vec{b} \times \vec{c}|$ は底面の平行四辺形の面積なので,

$$(\text{体積}) = (\vec{a} \cdot \vec{n}) \times (|\vec{b} \times \vec{c}|) = \vec{a} \cdot \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \times |\vec{b} \times \vec{c}| = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

を得る．□

2.4 図形とベクトルの関係のまとめ

平面と空間で，同じ図形を表すのに同じ式で良い場合と，同じ型の式なのに異なる図形を表す場合があった．その背景には明確な理由がある．

今までの所々で強調はしてきたが，重要なことなので，改めてこの節でまとめることにする．

ポイントは，パラメータの数と，方程式の数と，空間の次元の数に注目することである．

図形のパラメータの数は，その図形がどれだけ自由に動けるかを表している．

例えば，直線はパラメータ 1 つで表せるが，平面はパラメータは 2 つ必要である．このことは，平面のほうが直線よりも，その上にある点が自由に動けることを意味している．

また，図形は 2 次元の平面や 3 次元の空間などの “空間” に含まれているので，図形自身が入っている空間の次元より多くのパラメータを持つことはできない．その意味で，空間の次元は，その中に含むことのできる図形のパラメータの最大値であるといえる．

空間の次元の数と，図形のパラメータの数の差が，その図形を表すのに必要な（パラメータを含まない）方程式の数である．方程式は図形が自由に動くのを制限する役割を果たしていると考えるとよい．

以上のことを踏まえて，それぞれの場合をまとめてみる．

平面でも空間でも同じ式になる場合

平面や空間などの，その図形がある “空間” によらず，図形そのもの性質で式を表す場合は，同じ図形は同じ式で表すことができる．

すなわち，

図形のパラメータの数 ＝ 図形の次元

ということである．

直線	パラメータ 1 つ	1 次元の図形	$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$
平面	パラメータ 2 つ	2 次元の図形	$\vec{p} = (1-t-s)\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c}$

平面でも空間で同じ型の式にならない場合

図形を表すときに，パラメータを含まない方程式で表すと，その図形の入っている“空間”の次元によって表される図形が変わってくる．

すなわち，

図形の次元 ＝ “空間” の次元 − 方程式の数

ということである．

ただし，図形が異なっていても方程式の型が同じ場合，非常によく似た性質を持つことに注意せよ．

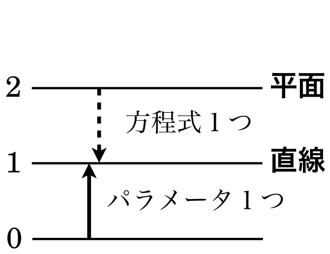
- $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ は方程式 1 つ

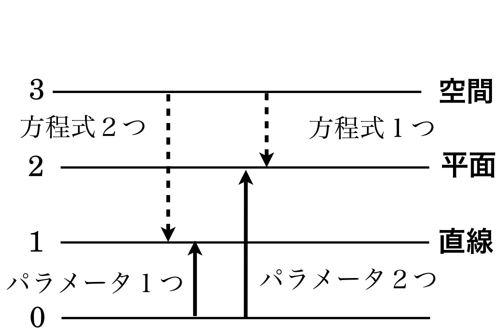
平面での直線	＝	平面	−	方程式 1 つ	$lx+my+n=0$
1 次元	＝	2 次元	−	1 つ	

空間での平面	＝	空間	−	方程式 1 つ	$lx+my+nz+k=0$
2 次元	＝	3 次元	−	1 つ	

- 空間での直線

空間での直線	＝	空間	−	方程式 2 つ	$\dfrac{x-a}{l}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-c}{n}$
1 次元	＝	3 次元	−	2 つ	



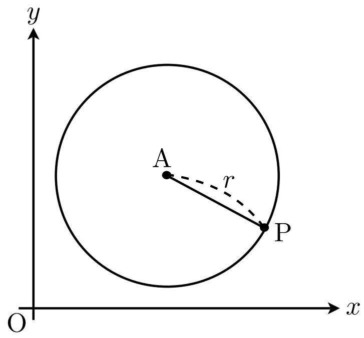


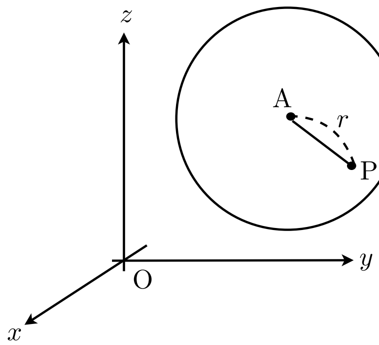
2.5　円と球

平面での円と，空間での球は同じ性質を持つので同時に話をする．

以下「円または球」というときは，特に断りがないときは,「円」は平面上での円をさし，「球」は空間内の「球」をさすものとする．特に空間内の「円」を扱うときにはそのつど注意をする．

・中心が $\mathrm{A}(\vec{a})$，半径 $r > 0$ である 円または球 上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とする．





円または球 の定義より，$\mathrm{AP} = r$ であるので,

$$|\vec{p} - \vec{a}| = r \iff (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = r^2$$

となる．この式を，円または球 のベクトル方程式という.

② 平面上で，$\vec{p} = (x,\, y)$, $\vec{a} = (a,\, b)$ とすると，

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

となり，円の方程式（標準形）,

③ 空間内で，$\vec{p} = (x,\, y,\, z)$, $\vec{a} = (a,\, b,\, c)$ とすると，

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

となり，球の方程式（標準形）が得られる.

補足. 円または球 の方程式の一般形は,

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

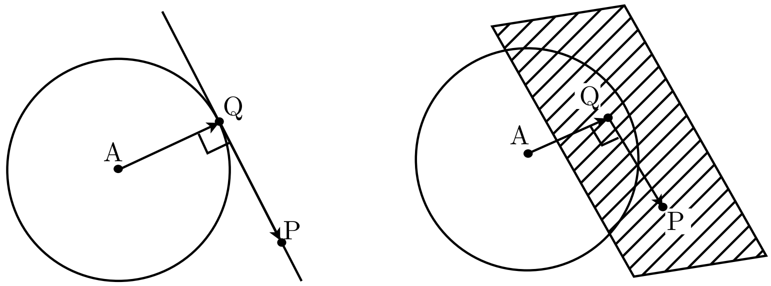
となる．

２次の項の係数が同じ．

無条件では 円または球 にはならない．→平方完成したときの右辺が正.

<u>**接線・接平面**</u>

円または球 上の点 Q($\vec{q}$) で接する 接線または接平面 上の点を P($\vec{p}$) とする．



接線または接平面 の性質より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ である．したがって，点 Q を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を法線ベクトルとする，直線または平面 なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = (\vec{q} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) = 0$$

と接線または接平面 のベクトル方程式が得られる．このままでも十分使いやすいのであるが，点 Q($\vec{q}$) は円上の点であることに注意して式変形をすると,

$$(\vec{q} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a} - (\vec{q} - \vec{a})) = 0$$
$$(\vec{q} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = (\vec{q} - \vec{a}) \cdot (\vec{q} - \vec{a}) = r^2$$

これより，接線または接平面 のベクトル方程式は,

$$(\vec{q} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = r^2$$

となる. (形式上，円または球 のベクトル方程式で一つの $\vec{p}$ を接点 $\vec{q}$ にしただけ.)

② 平面上で，$\vec{p} = (x,\, y)$, $\vec{a} = (a,\, b)$, $\vec{q} = (x_0,\, y_0)$ とすると，円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上の点 $(x_0,\, y_0)$ での接線の方程式は,

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$$

となる. ($(x,\, y)$ の一つを $(x_0,\, ,y_0)$ にしただけ.)

③ 空間内で，$\vec{p}=(x,\,y,\,z)$，$\vec{a}=(a,\,b,\,c)$，$\vec{q}=(x_0,\,y_0,\,z_0)$ とすると，球 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 上の点 $(x_0,\,y_0,\,z_0)$ での接平面の方程式は，

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)+(z_0-c)(z-c)=r^2$$

となる．($(x,\,y,\,z)$ の一つを $(x_0,\ ,y_0,\,z_0)$ にしただけ．)

補足． 2点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) を直径の両端とする円または球 上の点 P($\vec{p}$) は，円周角の定理の逆より，

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

なお，$\vec{p}=\vec{a}, \vec{p}=\vec{b}$ のときにも成り立つことを確認せよ．