体験授業（数学）

（注意）指示をするまであけないで下さい

ピタゴラス数

２０１４年9月１３日（土）

１０：００〜１１：００

数学科　小澤嘉康

見つけたピタゴラス数

計算らん

簡単に見つけたピタゴラス数（m と n は 10 以下）

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
4	1	15	8	17

m と n が,

- 互いに素
- m の方が n よりも大きい
- 一方が奇数で他方が偶数

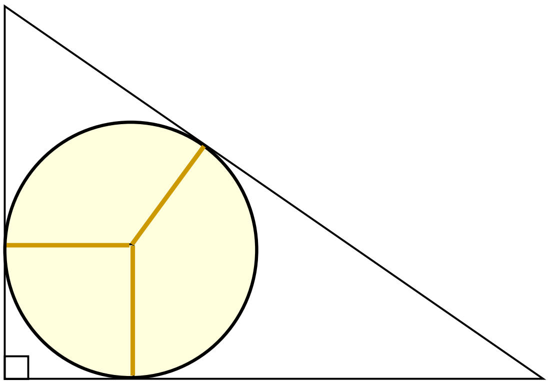
のとき

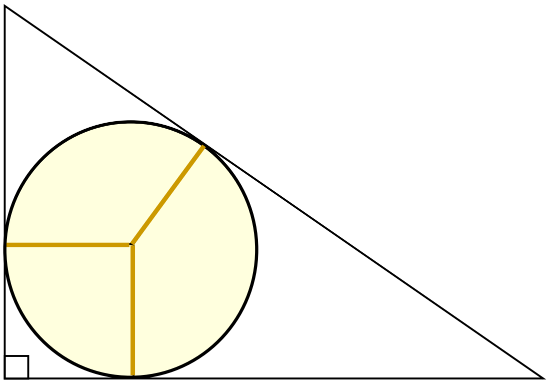
- $a = m^2 - n^2$
- $b = 2 \times m \times n$
- $c = m^2 + n^2$

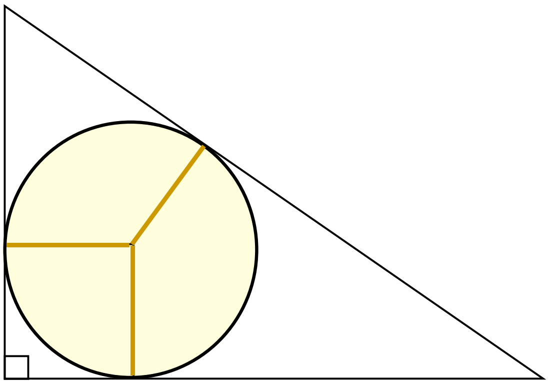
簡単に見つけたピタゴラス数（mとnは10以下）

m	n	a	b	c

好きなピタゴラス数で，三角形の内接円の半径を求めてみよう．







好きなピタゴラス数で，三角形の面積を計算して，

気がついたことを書いてみよう．

体験授業（数学）

資　料

ピタゴラス数

２０１４年９月１３日（土）

１０：００～１１：００

数学科　小澤嘉康

定理

① 互いに素であるピタゴラス数 (a, b, c) は，条件 で表すことができる.

② 逆に，３つの数 (a, b, c) が条件 をみたすならば，互いに素であるピタゴラス数である.

条件

> ２つの整数 m, n を用いて,
>
> $a = m^2 - n^2$
>
> $b = 2mn$
>
> $c = m^2 + n^2$
>
> ただし,
>
> m と n は互いに素
>
> $m > n$
>
> m と n のうち一方が奇数で他方が偶数

証明

① について.

まず，a と b のうち一方が奇数で他方が偶数であることを示す.

a と b の可能性としては，両方とも偶数，両方とも奇数，一方が奇数で他方が偶数，の３通りある．このうち，両方とも偶数であることも，両方とも奇数であることも起こらないことを示す.

はじめに，a と b が両方とも偶数であると仮定すると，$a = 2A,\ b = 2B$ と表すことができる．$a^2 + b^2 = c^2$ より，$c^2 = (2A)^2 + (2B)^2 = 2(2A^2 + 2B^2)$ となるので，c^2 は偶数である．よって，c も偶数となるが，a も b も偶数であるので，a, b, c が互いに素であることに反する．したがって，a と b が両方とも偶数であることはない.

次に，a と b が両方とも奇数であると仮定すると，$a = 2A+1,\ b = 2B+1$ と表すことができで

きる．$a^2+b^2=c^2$ より，$c^2=(2A+1)^2+(2B+1)^2=2(2A^2+2A+2B^2+2B+1)$ となるので，c^2 は偶数である．よって，c も偶数となるので $c=2C$ と表すことができる．左辺に代入すると，$(2C)^2=4C^2=2(2A^2+2A+2B^2+2B+1)$ より，$2C^2=2(A^2+A+B^2+B)+1$ となるが，左辺は偶数であるが，右辺は奇数となり不合理．したがって，a と b が両方とも奇数であることはない．

よって，a と b のうち一方が奇数で他方が偶数であることが示せたので，以下では，a を奇数，b を偶数とする．また，$c^2=a^2+b^2$ で，a^2 は奇数，b^2 は偶数より，c^2 は奇数となるので，c は奇数であることがわかる．

次に，a, b, c はどの２つの数も互いに素であることを示す[*1]．a と b の最大公約数を d とすると，互いの素である２つの整数 A と B を用いて，$a=Ad,\ b=Bd$ と表せる．$a^2+b^2=c^2$ より，$c^2=(Ad)^2+(Bd)^2=(A^2+B^2)d^2$ となり，d は c の約数となる．したがって，d は a, b, c の公約数であるが，a, b, c は互いに素なので $d=1$，よって，a と b は互いに素であることが示せた．a, c や b, c でも同様に示せる．

さて，$a^2+b^2=c^2$ より，$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$ であり，b は偶数なので，$b=2B$ と表すと，$(2B)^2=(c+a)(c-a)$ となる．さらに，a と c は奇数なので，$c\pm a$ は偶数であり，$B^2=\dfrac{c+a}{2}\cdot\dfrac{c-a}{2}$ と整数の積で表すことができる．

ここで，２つの整数 $\dfrac{c+a}{2}$ と $\dfrac{c-a}{2}$ は互いに素であることを示す．２つの数の最大公約数を d とすると，互いに素である２つの整数 h と k を用いて，$\dfrac{c+a}{2}=hd,\ \dfrac{c-a}{2}=$

[*1] a, b, c は互いに素であるとは３つの数 a, b, c の最大公約数が 1 ということであり，一般的には，この中の２つの数が互いに素であるとは限らない．例えば，３つの数 $2, 3, 4$ は互いに素であるが，この中の２つの数 $2, 4$ は互いに素ではない．互いに素であるピタゴラス数ではどの２つの数も互いに素であることが示せるということである．

hd と表せる．すると，$c=(h+k)d$, $a=(h-k)d$ となり，d は a と c の公約数であるが a と c は互いに素なので $d=1$．よって，２つの整数 $\dfrac{c+a}{2}$ と $\dfrac{c-a}{2}$ は互いに素であることが示せた．

互いに素である２つの整数 $\dfrac{c+a}{2}$ と $\dfrac{c-a}{2}$ の積が平方数の B^2 であることから，２つの整数 $\dfrac{c+a}{2}$ と $\dfrac{c-a}{2}$ はそれぞれともに平方数である．したがって，互いに素である２つの整数 m, n を用いて，$\dfrac{c+a}{2}=m^2$, $\dfrac{c-a}{2}=n^2$ と表すことができる．なお，$\dfrac{c+a}{2}>\dfrac{c-a}{2}$ であるので，$m>n$ がいえる．

これより，$c=m^2+n^2$, $a=m^2-n^2$ が得られ，また，$B^2=\dfrac{c+a}{2}\cdot\dfrac{c-a}{2}=m^2\cdot n^2$ から $B=mn$．よって，$b=2B=2mn$ も得られる．

m と n の偶奇であるが，両方ともに偶数，あるいは奇数とすると，$c=m^2+m^2$ も $a=m^2-n^2$ も偶数となり，b も $b=2mn$ より偶数なので，a, b, c が互いに素に反するので，m と n は一方が奇数で他方が偶数でなければならないことがわかる．

② について．

逆に，条件 をみたすとき，ピタゴラス数になることは明らかである．実際，$a=m^2-m^2, b=2mn, c=m^2+n^2$ より，$a^2+b^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2=m^4+2m^2n^2+n^4=(m^2+n^2)^2=c^2$ である．

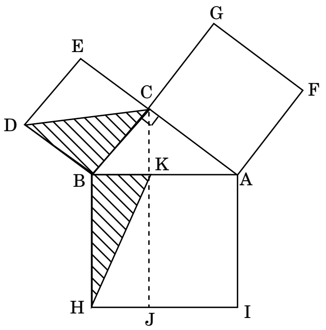
重要なのは，この条件をみたす a, b, c は互いに素である，ということである．a, b, c の最大公約数を d とすると，互いに素である３つの整数 A, B, C を用いて，$a=m^2-n^2=Ad, b=2mn=Bd, c=m^2+m^2=Cd$ と表せる．特に a, c に注目すると，$m^2=\dfrac{C+A}{2}d$, $n^2=\dfrac{C-A}{2}d$ となり，a, c はともに奇数なので A, C も奇数であることから，$\dfrac{C\pm A}{2}$ は整数なので，d は m^2 と n^2 の公約数である．一方 m と n は互い

に素より，m^2 と n^2 も互いに素であるので，m^2 と n^2 の最大公約数は 1 である．よって $d = 1$．したがって，a, b, c は互いに素であることが示せた.

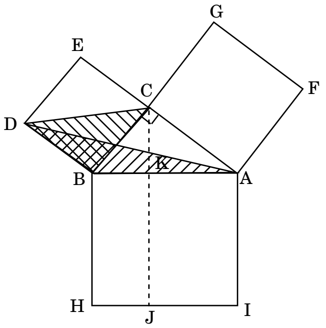
ピタゴラス数 (a, b, c) で，c が 100 以下のものを，a が小さいものから順に並べたもの．52 個ある．*がついているのは，互いに素であるピタゴラス数.

(3, 4, 5) *	(15, 20, 25)	(25, 60, 65)	(39, 80, 89) *
(5, 12, 13) *	(15, 36, 39)	(27, 36, 45)	(40, 42, 58)
(6, 8, 10)	(16, 30, 34)	(28, 45, 53) *	(40, 75, 85)
(7, 24, 25) *	(16, 63, 65) *	(28, 96, 100)	(42, 56, 70)
(8, 15, 17) *	(18, 24, 30)	(30, 40, 50)	(45, 60, 75)
(9, 12, 15)	(18, 80, 82)	(30, 72, 78)	(48, 55, 73) *
(9, 40, 41) *	(20, 21, 29) *	(32, 60, 68)	(48, 64, 80)
(10, 24, 26)	(20, 48, 52)	(33, 44, 55)	(51, 68, 85)
(11, 60, 61) *	(21, 28, 35)	(33, 56, 65) *	(54, 72, 90)
(12, 16, 20)	(21, 72, 75)	(35, 84, 91)	(57, 76, 95)
(12, 35, 37) *	(24, 32, 40)	(36, 48, 60)	(60, 63, 87)
(13, 84, 85) *	(24, 45, 51)	(36, 77, 85) *	(60, 80, 100)
(14, 48, 50)	(24, 70, 74)	(39, 52, 65)	(65, 72, 97) *

ピタゴラスの定理の証明（その１）

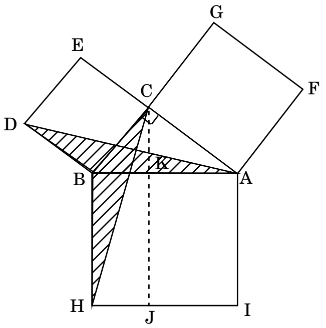


四角形 CBDE の面積と四角形 BHJK の面積が等しいことを示すには，△BCD = △BHK を示せばよい．



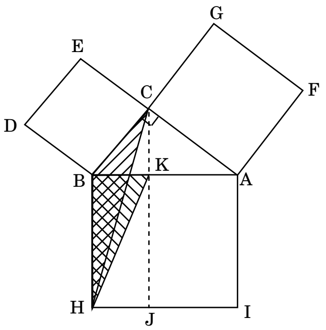
①

EA//DB なので，等積変形により，△BDC = △BDA



②

DB = CB，BA = BH，∠DBA = ∠CBH なので，２つの辺の長さと，その挟まれる角の大きさがそれぞれ等しいので，△BDA と △BCH は合同．したがって，△BDA = △BCH

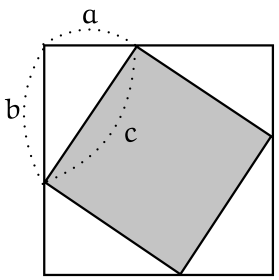


③

CJ//BH なので，等積変形により，△BCH = △BKH

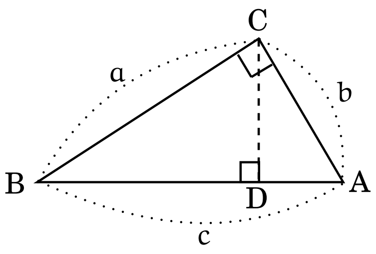
①，②，③ より △BCD = △BKH が示せた．

ピタゴラスの定理の証明（その２）



外側の大きな正方形の面積と，４つの直角三角形と内側のグレーの正方形の面積の合計は等しいので，$(a+b)^2 = 4 \times \frac{ab}{2} + c^2$．したがって，$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ より，$a^2 + b^2 = c^2$ が得られる．

ピタゴラスの定理の証明（その３）



$\triangle$ABC と $\triangle$CBD は相似なので，$c : a = a :$ BD．よって，BD $= \frac{a^2}{c}$．同様に，$\triangle$ABC と $\triangle$ACD は相似なので，$c : b = b :$ AD．よって，AD $= \frac{b^2}{c}$．したがって，BD + AD = BA より，$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = c$ から，$a^2 + b^2 = c^2$ が得られる．

参考図書など

今日のお話で興味を持った人のために，関連する本やネットのページを紹介します．

- シェルピンスキー著，銀林浩訳『ピタゴラスの三角形』東京図書
- 大矢真一『ピタゴラスの定理』東海大学出版会
- 『Wolfram MathWorld Pythagorean Triple』
  http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html