体験授業（数学）

ピタゴラス数

９月１３日（土）　１０：００～１１：００

場所　２６０１教室

時間の都合で省略した部分も含まれた完全版です

小澤  嘉康

ピタゴラス数とは

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

が成り立つ３つの整数 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ の組を

ピタゴラス数 といいます.

☺ ここで, $\mathbf{a}^2$ とは, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \times \mathbf{a}$ のことで,

$\mathbf{a}$ の２乗といいます.

ちょっと寄り道をしましょう

「ピタゴラス数」の話の前に,

同じ「ピタゴラス」の名前が付いている

「ピタゴラスの定理」について

見てみましょう.

ピタゴラスの定理

- 三角形についての性質です.
- 三平方の定理ともいいます.
- 海城では中学２年生で出てきます.
- 中学の幾何（図形）での最大の山場です.

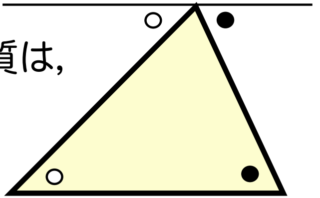
海城での幾何（図形）の時間は

ちょっとだけ，宣伝です

海城では，幾何（図形）の時間は，図形の性質を覚えたり，面積などの計算をするだけでなく，定義 と 公理からはじめて，図形の性質をひとつひとつ証明をしていくという，論理的思考をしっかり学ぶための時間ととらえています．

海城での幾何（図形）の時間は

例えば,



「三角形の３つの角の和は 180° である」という性質は,

「平行線の錯角は等しい」を用いて示され,

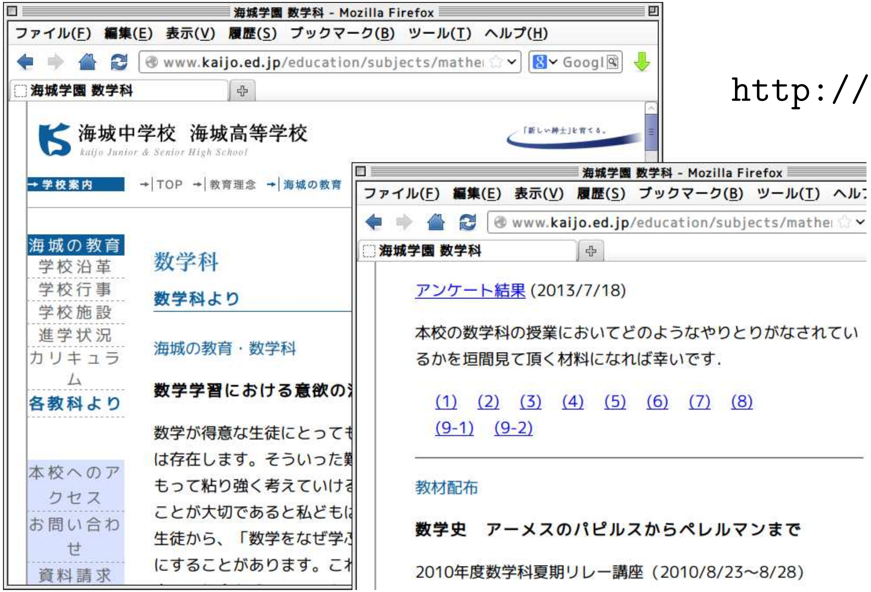
この「平行線の錯角は等しい」という性質は,

「直線上にない１点を通り，この直線に平行な直線は唯一つ」という

公理から導かれます.

公理は約束なので，公理まで戻れれば証明できたことになります.

数学科のページをどうぞご覧下さい

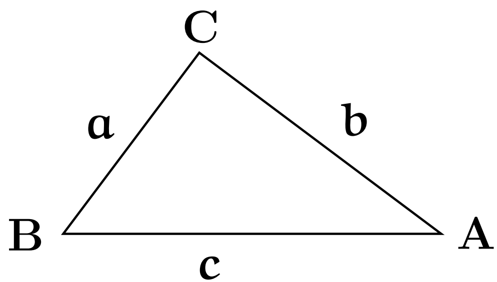


http://www.kaijo.ed.jp/

ピタゴラスの定理

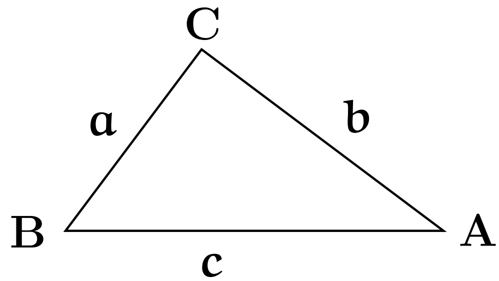
図のような３つの辺の長さが，それぞれ a, b, c である

三角形 ABC において，



角 C が 90° の直角三角形 $\iff a^2 + b^2 = c^2$

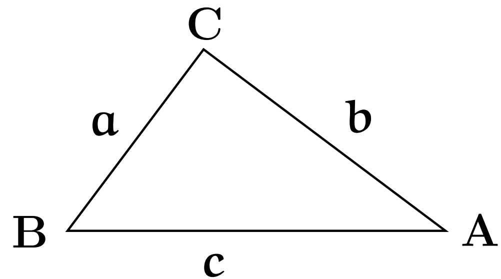
ピタゴラスの定理



$$a^2 + b^2 = c^2$$

この式で，例えば a^2 は何を表しているのでしょうか？

ピタゴラスの定理

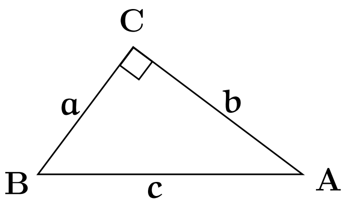


$$a^2 + b^2 = c^2$$

この式で，例えば a^2 は何を表しているのでしょうか？

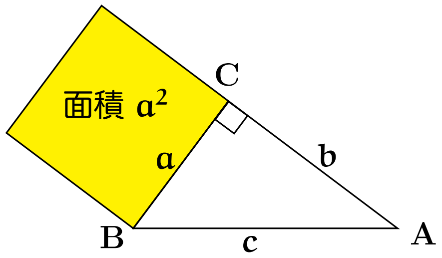
a は三角形の一辺の長さなので，$a^2 = a \times a$ は一辺の長さが a である正方形の面積を表します．

ピタゴラスの定理



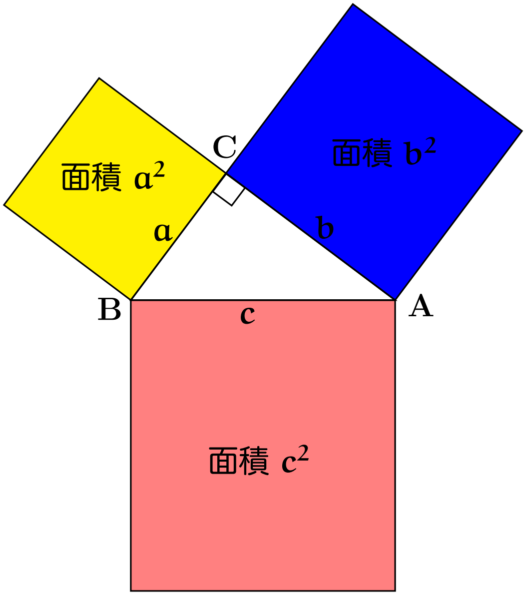
$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

ピタゴラスの定理



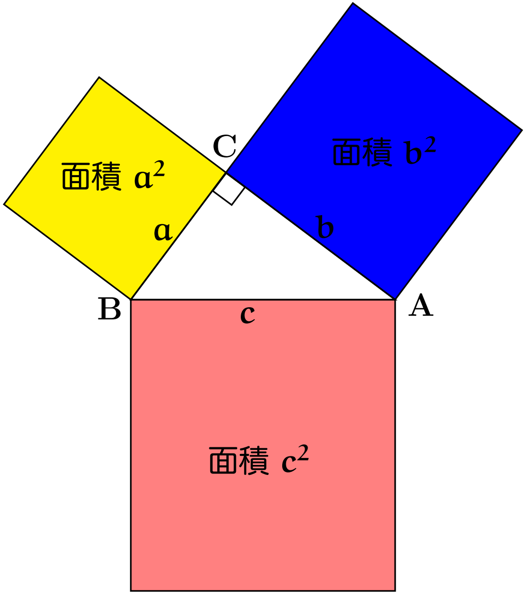
$$a^2 + b^2 = c^2$$

ピタゴラスの定理



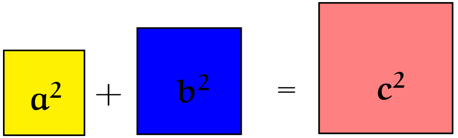
$$a^2 + b^2 = c^2$$

ピタゴラスの定理



$$a^2 + b^2 = c^2$$

角 C が直角



ピタゴラスさん

約 2500 年前のギリシャの人

ピタゴラス数を見つけてみよう

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ３つの整数 $(a,\ b,\ c)$ の組を

見つけてみよう.

時間は ３ 分間です

◎ $(a,\ b,\ c)$ の並べる順番は気にしなくてかまいません

たとえば …

- $(3,\ 4,\ 5)$ $\qquad 3^2+4^2=9+16=25=5^2$
- $(5,\ 12,\ 13)$ $\qquad 5^2+12^2=25+144=169=13^2$
- $(8,\ 15,\ 17)$ $\qquad 8^2+15^2=64+225=289=17^2$
- $(7,\ 24,\ 25)$ $\qquad 7^2+24^2=49+576=625=25^2$

たとえば …

(3, 4, 5) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

(5, 12, 13) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

(8, 15, 17) $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$

(7, 24, 25) $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$

たとえば…

- $(6,\ 8,\ 10)$　　$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$
- $(9,\ 12,\ 15)$　　$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$
- $(12,\ 16,\ 20)$　　$12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$
- $(15,\ 20,\ 25)$　　$15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2$

たとえば ⋯

$(6,\ 8,\ 10)$　　$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

$(9,\ 12,\ 15)$　　$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$

$(12,\ 16,\ 20)$　　$12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$

$(15,\ 20,\ 25)$　　$15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2$

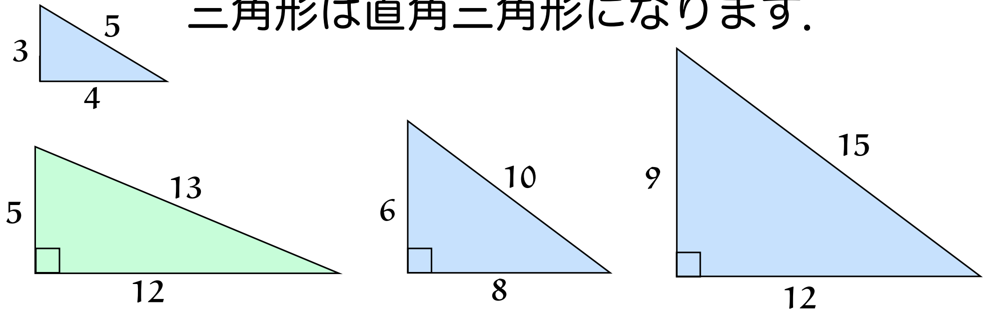
よく見ると，これらは $(3,\ 4,\ 5)$ の倍数になっています．

ピタゴラス数と三角形

ピタゴラス数は $a^2 + b^2 = c^2$ の関係式があります.

ピタゴラスの定理より，３つの辺の長さが a, b, c である

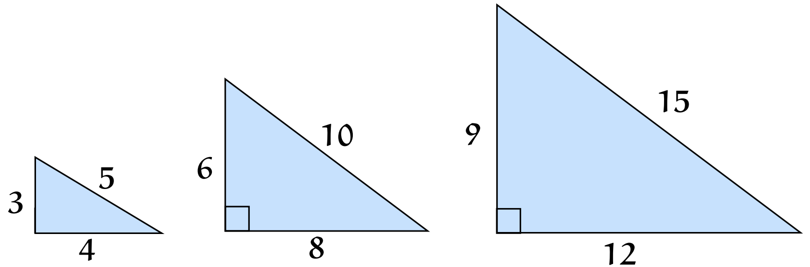
三角形は直角三角形になります.



一番長い辺（長さ c の辺）が斜辺になります.

ピタゴラス数と三角形

$(6,\ 8,\ 10)$ や $(9,\ 12,\ 15)$ のように，$(3,\ 4,\ 5)$ の倍数になっているピタゴラス数の三角形は，すべて相似です．



これからは，$(a,\ b,\ c)$ の最大公約数が 1 であるピタゴラス数について調べていきましょう．

用語の説明

最大公約数が 1 であることを

「互(たが)いに素(そ)」

といいます．便利な用語ですので，是非覚えて下さい．

用語の説明

互いに素の使い方を少し練習をしてみましょう

例えば,

- 2 と 3 は最大公約数が 1 なので，互いに素です．
- 2 と 4 は最大公約数が 2 なので，互いに素ではありません．
- 2 と 3 と 4 だと，これら３つの数の最大公約数は 1 なので，

  互いに素になります．

疑問

- ピタゴラス数を簡単に見つける方法はあるか？

- ピタゴラス数にはどのような性質があるのか？

ピタゴラス数を簡単に見つける方法

２つの整数 m と n が

- 互いに素
- m の方が n よりも大きい
- 一方が奇数で他方が偶数

をみたすとき，すべてのピタゴラス数 (a, b, c) は，

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2 \times m \times n, \quad c = m^2 + n^2$$

で求めることができます．

ピタゴラス数を簡単に見つける方法

- 互いに素
- m の方が n よりも大きい
- 一方が奇数で他方が偶数

とき

- $a = m^2 - n^2$
- $b = 2 \times m \times n$
- $c = m^2 + n^2$

なので

例えば，$n = 1$ のとき，

$m = 2$ とすると，$(3, 4, 5)$ が求まる．

計算らん　$a = 2^2 - 1^2 = 3$,　$b = 2 \times 2 \times 1 = 4$,　$c = 2^2 + 1^2 = 5$

ピタゴラス数を簡単に見つける方法

- 互いに素
- m の方が n よりも大きい
- 一方が奇数で他方が偶数

とき

- $a = m^2 - n^2$
- $b = 2 \times m \times n$
- $c = m^2 + n^2$

なので

例えば，$n = 1$ のとき，

$m = 2$ とすると，$(3, 4, 5)$ が求まる．

$m = 3$ とすると，m も n も奇数になるので条件をみたさない．

計算らん

ピタゴラス数を簡単に見つける方法

- 互いに素
- m の方が n よりも大きい
- 一方が奇数で他方が偶数

とき

- $a = m^2 - n^2$
- $b = 2 \times m \times n$
- $c = m^2 + n^2$

なので

例えば，$n = 1$ のとき，

$m = 2$ とすると，$(3,\ 4,\ 5)$ が求まる．

$m = 3$ とすると，m も n も奇数になるので条件をみたさない．

$m = 4$ とすると，$(15,\ 8,\ 17)$ が求まる．

計算らん　$a = 4^2 - 1^2 = 15$，　$b = 2 \times 4 \times 1 = 8$，　$c = 4^2 + 1^2 = 17$

ピタゴラス数を簡単に求めてみよう

m と n が10以下の

互いに素である

整数のとき,

ピタゴラス数を

求めてみよう.

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
4	1	15	8	17
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

時間は３分間です

答え

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
4	1	15	8	17
6	1	35	12	37
8	1	63	16	65
10	1	99	20	101
3	2	5	12	13
5	2	21	20	29
7	2	45	28	53

m	n	a	b	c
9	2	77	36	85
4	3	7	24	25
8	3	55	48	73
10	3	91	60	109
5	4	9	40	41
7	4	33	56	65
9	4	65	72	97

m	n	a	b	c
6	5	11	60	61
8	5	39	80	89
7	6	13	84	85
8	7	15	112	113
10	7	51	140	149
9	8	17	144	145
10	9	19	180	181

22個あります

疑問

- ピタゴラス数を簡単に見つける方法はあるか？

- ピタゴラス数にはどのような性質があるのか？

疑問

- ピタゴラス数を簡単に見つける方法はあるか？

→ある

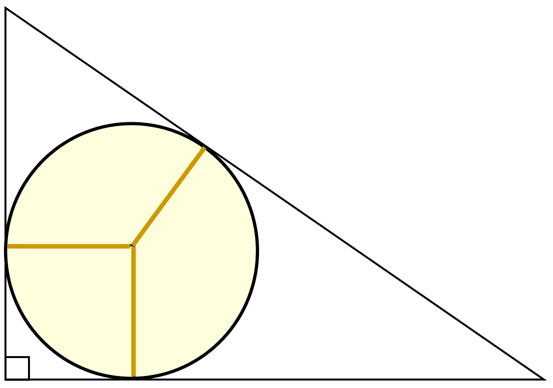
- ピタゴラス数にはどのような性質があるのか？

ピタゴラス数の性質

- ピタゴラス数の三角形は，内接円の半径も整数
- ピタゴラス数の三角形の面積は  の倍数

などなど

ピタゴラス数の三角形は，内接円の半径も整数



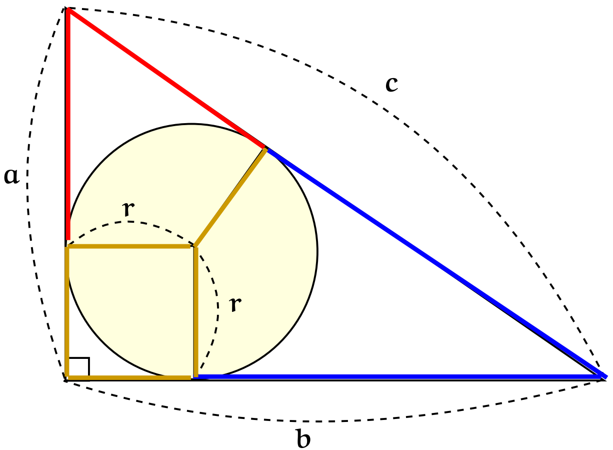
内接円とは，

三角形の内部で

３つ辺に接する円

のことです．

ピタゴラス数の三角形は，内接円の半径も整数

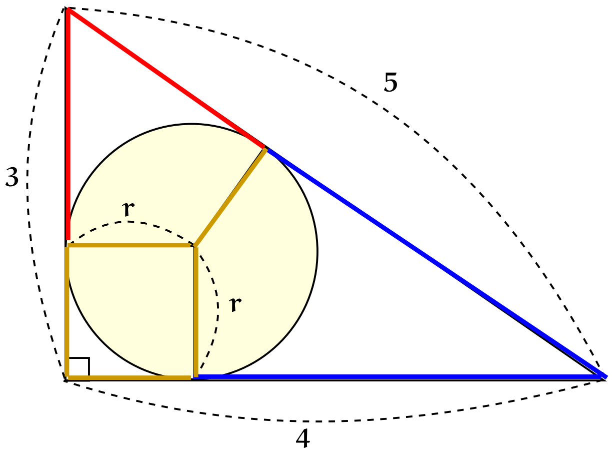


内接円の性質により，

図の同じ色の辺の

長さは等しくなります．

ピタゴラス数の三角形は，内接円の半径も整数



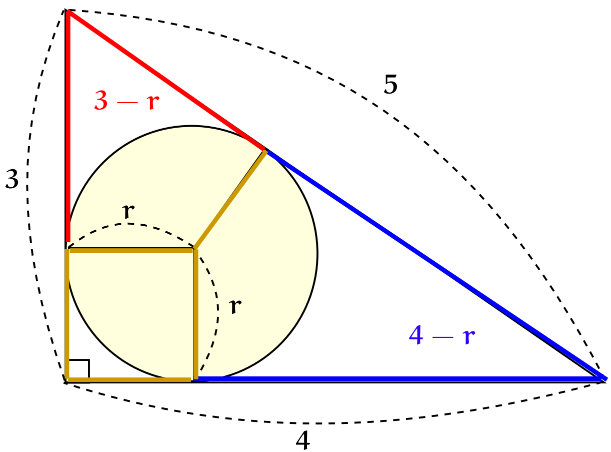
３つの辺の長さが

3, 4, 5 のときに，

内接円の半径を

求めてみましょう.

ピタゴラス数の三角形は，内接円の半径も整数



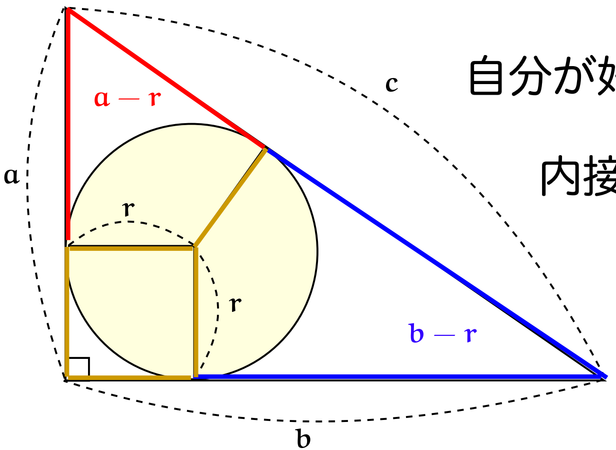
同じ色の長さは等しいので，

赤は $3-\mathbf{r}$　　青は $4-\mathbf{r}$

となります．図より，

$\mathbf{5}=(\mathbf{3}-\mathbf{r})+(\mathbf{4}-\mathbf{r})$ ですので，半径 $\mathbf{r}$ は整数 $\mathbf{1}$ と求まりました．

ピタゴラス数の三角形は，内接円の半径も整数



それでは，先ほど求めたピタゴラス数の中で，

自分が好きなピタゴラス数の三角形の

内接円の半径を求めてみましょう．

時間は３分間です

答え

a	b	c	r
3	4	5	1
15	8	17	3
35	12	37	5
63	16	65	7
99	20	101	9
5	12	13	2
21	20	29	6
45	28	53	10

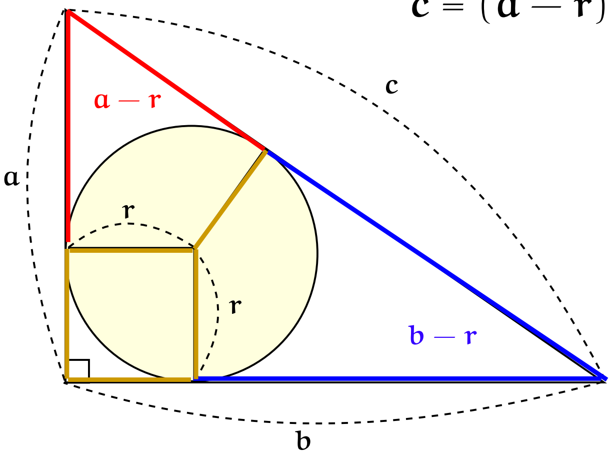
a	b	c	r
77	36	85	14
7	24	25	3
55	48	73	15
91	60	109	21
9	40	41	4
33	56	65	12
65	72	97	20

a	b	c	r
11	60	61	5
39	80	89	15
13	84	85	6
15	112	113	7
51	140	149	21
17	144	145	8
19	180	181	9

半径はすべて整数になりました.

こうなる理由を考えるのが数学です.

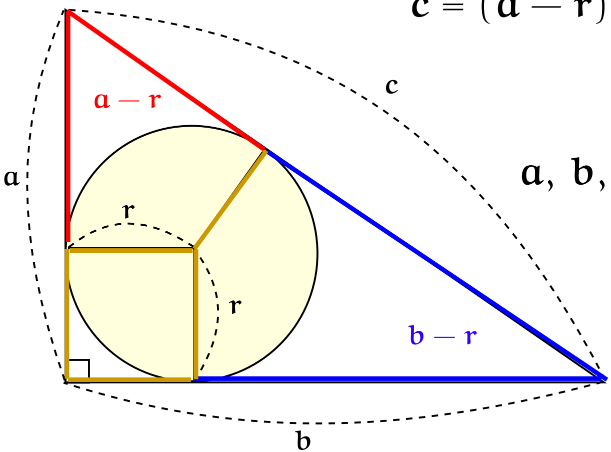
ピタゴラス数の三角形は，内接円の半径も整数



$\mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{r}) + (\mathbf{b} - \mathbf{r})$ より，内接円の半径 $\mathbf{r}$ は，

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}}{2}$$ で求まります．

ピタゴラス数の三角形は，内接円の半径も整数



$c = (a - r) + (b - r)$ より，内接円の半径 r は，

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$ で求まります．

a, b, c は奇数が２つ，偶数が１つなので，

分子の $a + b - c$ は偶数です．

したがって，半径 r は

整数であることがわかります．

ピタゴラス数の性質

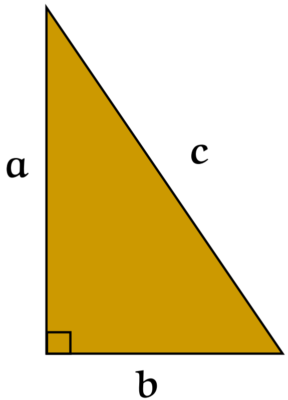
- ピタゴラス数の三角形は，内接円の半径も整数

- ピタゴラス数の三角形の面積は の倍数

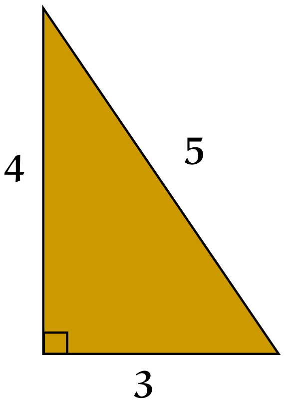
など など

ピタゴラス数の三角形の面積は  の倍数

三角形の面積は, $\dfrac{a \times b}{2}$ です.



ピタゴラス数の三角形の面積は の倍数



三角形の面積は, $\dfrac{a \times b}{2}$ です.

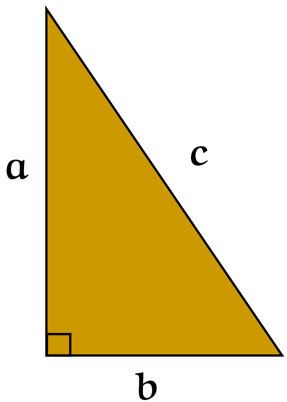
例えば, ３つの辺の長さが

3, 4, 5 のとき, 面積は,

$$\frac{3 \times 4}{2} = 6$$

となります.

ピタゴラス数の三角形の面積は の倍数



それでは，先ほど求めたピタゴラス数の中で，

自分が好きなピタゴラス数の三角形の面積を

いくつか計算して，どんな性質があるか

予想してみましょう

時間は１分間です

ピタゴラス数の三角形の面積は の倍数

a	b	面積
3	4	6
15	8	60
35	12	210
63	16	504
99	20	990
5	12	30
21	20	210
45	28	630

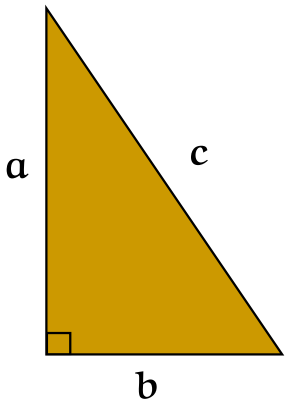
a	b	面積
77	36	1386
7	24	84
55	48	1320
91	60	2730
9	40	180
33	56	924
65	72	2340

a	b	面積
11	60	330
39	80	1560
13	84	546
15	112	840
51	140	3570
17	144	1224
19	180	1710

6の倍数ではないかと予想されます.

そうなる理由を考えるのが数学です.

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数



三角形の面積は，$\dfrac{a \times b}{2}$ です．

そして，a と b は，m と n を用いて，

$$a = m^2 - n^2 \qquad b = 2 \times m \times n$$

と表せました．ここでは，特に

m と n は，一方が奇数で，他方が偶数

という性質を用います．

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

$$(\text{面積}) = \frac{a \times b}{2} = \frac{(m^2 - n^2) \times 2 \times m \times n}{2} = (m^2 - n^2) \times m \times n$$

となります．ここで，ちょっと難しい公式ですが，

$$m^2 - n^2 = (m + n) \times (m - n)$$

が成り立ちますので，

$$(\text{面積}) = (m + n) \times (m - n) \times m \times n$$

となります．

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

したがって，$(\mathbf{m}+\mathbf{n}) \times (\mathbf{m}-\mathbf{n}) \times \mathbf{m} \times \mathbf{n}$ が

$\mathbf{6}$ の倍数であることを示しましょう.

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

したがって，$(\mathbf{m}+\mathbf{n}) \times (\mathbf{m}-\mathbf{n}) \times \mathbf{m} \times \mathbf{n}$ が

$\mathbf{6}$ の倍数であることを示しましょう.

$\mathbf{6} = \mathbf{2} \times \mathbf{3}$ ですので,

$\mathbf{2}$ の倍数であって，$\mathbf{3}$ の倍数であることが

いえればいいことがわかります.

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

まず，$\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ は，一方が奇数で，他方が偶数ですので，

$$(\mathbf{m}+\mathbf{n})\times(\mathbf{m}-\mathbf{n})\times\mathbf{m}\times\mathbf{n}$$

の $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ の部分が 2 の倍数であることが

わかりました．

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

まず，$\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ は，一方が奇数で，他方が偶数ですので，

$$(\mathbf{m}+\mathbf{n})\times(\mathbf{m}-\mathbf{n})\times\mathbf{m}\times\mathbf{n}$$

の $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ の部分が 2 の倍数であることが

わかりました.

次に，3 の倍数であることを示します.

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

数学ではよく用いる方法として,

3 の倍数であることを示すときに,

もとになっている $\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ を

3 の倍数で場合分けをする

というのがあります.

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

3の倍数で場合分けをする

とは,

3で割ったときの余りで場合分けをする

ということです.

3で割ったときの余りは0と1と2の3通りありますので,

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

	mが余り 0	mが余り 1	mが余り 2
nが余り 0			
nが余り 1			
nが余り 2			

の９通りの可能性があります.

このすべての場合で 3 の倍数になることを調べてみましょう.

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

まず，$\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ のうち，少なくとも１つが 3 の倍数，

つまり，余りが 0 のとき，

$$(\mathbf{m}+\mathbf{n})\times(\mathbf{m}-\mathbf{n})\times\mathbf{m}\times\mathbf{n}$$

の $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ の部分が 3 の倍数になります．

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

したがって,

	m が余り 0	m が余り 1	m が余り 2
n が余り 0			
n が余り 1			
n が余り 2			

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

したがって,

	m が余り 0	m が余り 1	m が余り 2
n が余り 0			
n が余り 1			
n が余り 2			

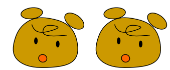
となります.

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

次に,

余りが 1 という状態を,

余りが 2 という状態を,



と表すことにします.

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

まず，$\mathfrak{m}$ が余り 1 で，$\mathfrak{n}$ が余り 1 のとき．

$\mathfrak{m}$

$\mathfrak{n}$

ですので，

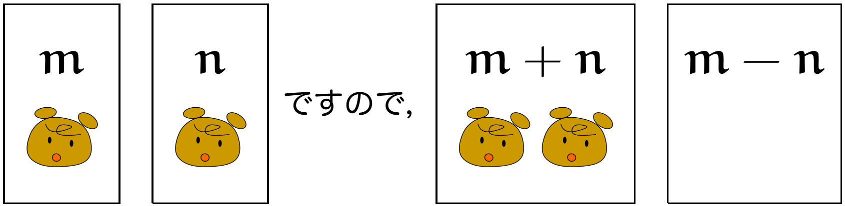
$\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$

$\mathfrak{m} - \mathfrak{n}$

となります

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

まず，m が余り 1 で，n が余り 1 のとき．



ですので，となります

つまり，$m-n$ は余りが 0 になるので，

$$(m+n)\times(m-n)\times m\times n$$

の $(m-n)$ の部分が 3 の倍数になります．

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

したがって,

	m が余り 0	m が余り 1	m が余り 2
n が余り 0			
n が余り 1			
n が余り 2			

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

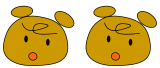
したがって,

	m が余り 0	m が余り 1	m が余り 2
n が余り 0			
n が余り 1			
n が余り 2			

となります.

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

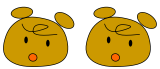
次に，$\mathbf{m}$ が余り 2 で，$\mathbf{n}$ が余り 1 のとき．

$\mathbf{m}$	$\mathbf{n}$		$\mathbf{m}+\mathbf{n}$	$\mathbf{m}-\mathbf{n}$	
		ですので,			となります

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

次に，$\mathfrak{m}$ が余り 2 で，$\mathfrak{n}$ が余り 1 のとき．

$\mathfrak{m}$

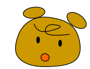


$\mathfrak{n}$

ですので，

$\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$

$\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$



となります

つまり，$\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ は余りが 3，つまり，3 の倍数になるので，

$$(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\times(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})\times\mathfrak{m}\times\mathfrak{n}$$

の $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})$ の部分が 3 の倍数になります．

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

したがって,

	m が余り 0	m が余り 1	m が余り 2
n が余り 0			
n が余り 1			
n が余り 2			

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

したがって,

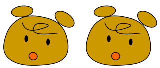
	m が余り 0	m が余り 1	m が余り 2
n が余り 0			
n が余り 1			
n が余り 2			

となります.

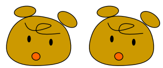
ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

次に，$\mathbf{m}$ が余り 2 で，$\mathbf{n}$ が余り 2 のとき．

$\mathbf{m}$



$\mathbf{n}$



ですので，

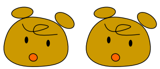
$\mathbf{m} + \mathbf{n}$

$\mathbf{m} - \mathbf{n}$

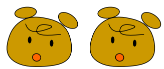
ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

次に，$\mathbf{m}$ が余り 2 で，$\mathbf{n}$ が余り 2 のとき．

$\mathbf{m}$

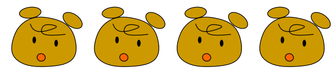


$\mathbf{n}$



ですので，

$\mathbf{m}+\mathbf{n}$



$\mathbf{m}-\mathbf{n}$

つまり，$\mathbf{m}-\mathbf{n}$ は余りが 0 になるので，

$$(\mathbf{m}+\mathbf{n})\times\color{red}{(\mathbf{m}-\mathbf{n})}\times\mathbf{m}\times\mathbf{n}$$

の $(\mathbf{m}-\mathbf{n})$ の部分が 3 の倍数になります．

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

したがって,

	m が余り 0	m が余り 1	m が余り 2
n が余り 0			
n が余り 1			
n が余り 2			

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

したがって,

	m が余り 0	m が余り 1	m が余り 2
n が余り 0			
n が余り 1			
n が余り 2			

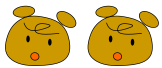
となります.

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

最後に，m が余り 1 で，n が余り 2 のとき．

m

n



ですので，

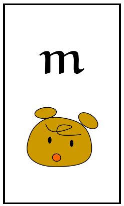
$m+n$

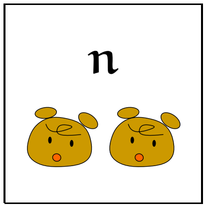
$m-n$

となります

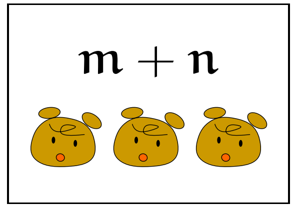
ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

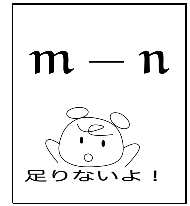
最後に，m が余り 1 で，n が余り 2 のとき．





ですので，





となります

つまり，$m+n$ は余りが 3，つまり，3 の倍数になるので，

$$(m+n)\times(m-n)\times m\times n$$

の $(m+n)$ の部分が 3 の倍数になります．

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

したがって,

	m が余り 0	m が余り 1	m が余り 2
n が余り 0			
n が余り 1			
n が余り 2			

ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

したがって,

	m が余り 0	m が余り 1	m が余り 2
n が余り 0			
n が余り 1			
n が余り 2			

となり，９通りのすべてで3の倍数になることが示せました

ピタゴラス数の性質

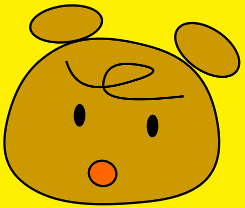
- ピタゴラス数の三角形は，内接円の半径も整数
- ピタゴラス数の三角形の面積は 6 の倍数

- 他にもたくさんおもしろい性質があるので

  調べてみよう.

質問の時間です

おわり



ありがとうございました