啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

Focus Gold 通信

フォーカスゴールド

vol.6

特集

自校作成問題を探る ～岡山朝日高校での実践～

岡山県立岡山朝日高等学校　山川宏史

1．はじめに

昭和の時代から永く続いた岡山市内普通科5校の高校入試総合選抜制度が段階的に消滅し，われらが岡山朝日高等学校が高校入試に自校作成問題を初めてつくったのが，平成16年度の学力検査であった。爾来今年度で節目の10年目を終えた。この間，本県や他都道府県の過去問なども研究しながら，本来の非常に多忙な業務と並行して作問された。今回栄誉ある機会を与えられたので，本校の数学自校作成問題について振り返ってみる。

2．問題作成の概要

中学校学習指導要領に沿い，教科書の内容を逸脱することなく，論理的思考力をみることができるように，十分に練られ工夫された出題が毎年行われている。オリジナルの問題であるが，学習指導要領を逸脱した難問・奇問が出題されることはない。大学入試センター試験や東京大学の個別学力検査とは違い，出題範囲の逸脱はない。この点では，本校の問題が格段に優れている。教科書の基礎基本を問うような問題に始まり，生徒がこれまでの知識を総動員してじっくりと考え，論理的思考力・発想力をみるような問題作成につとめている。45分という検査時間は本県の全県学力検査と同一で物足りないが，平均点は毎年約60％程度になることを目標に作題され，実際にそうなっている。したがって，易しい問題も多数含まれている。一部の意識の高い生徒諸君には物足りないようだ。

3．分野ごとの出題頻度

分野	年度	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
数と式	1元1次方程式	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
	連立方程式	●	●	●	●	●	●	●	●		
	式の計算	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
	平方根の計算	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
	2次方程式	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
図形	作図	●		●			●		●		
	空間図形	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
	平行線と角・線分比	●	●				●		●	●	
	三角形の合同							●		●	
	三角形の相似	●	●	●	●		●		●		●
	証明問題	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
	円周角	●	●	●	●	●	●	●			●
	三平方の定理	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
数量関係	正比例・反比例					●			●		
	1次関数	●	●	●	●	●	●	●		●	●
	確率	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
	2次関数	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
資料の活用	度数分布									●	●
	代表値									●	●
	近似値										
	標本調査										

数と式の各分野は，他の領域の問題においても計算過程で必要になることが多く，当然のことながら，ほぼ全分野が毎年出題されている。1元1次方程式は，単独問題としてではなく，他の分野の問題で立てた方程式を解く場面での出題である。一方，連立方程式や2次方程式は，文章題あるいは大問の一部で出題されている。式の計算や平方根の計算は，小問集合で小手調べに出題されることが多いが，計算技術により計算精度と所要時間に大差がつくように工夫された出題が多い。

図形については，空間図形についての考察や三平方の定理は毎年出題されている。空間図形には，円錐など回転体の体積も含まれている。空間図形の総合問題が毎年出題されるというわけではないが，空間把握力は数学においては重要な力といえる。三平方の定理は，中学校での最重要学習内容の1つであるので，これを学力検査で毎年出題しているのは当然といえる。三平方の定理が複数題出題されることが多い。また，証明問題は毎年出題されているが，内容は三角形の相似や角度の相等，三角形の形状など多岐にわたっている。角度の相等を証明するために，その前段階として三角形の合同を証明するなどの融合的な工夫された証明問題もよく出題されている。また，作図問題は，ほぼ隔年で出題されている。これは，暗記しておいた作図方法をそのまま使うことが多く，数学力や発想力というよりは学習内容の暗記を確認する面が強いからである。また，単に角の二等分線を作図しなさいというのではなく，融合的な作図を問うようなこともある。

数量関係については，正比例は1次関数に含まれるので出題されていない。反比例に関するものは時々出題されている。1次関数は2次関数と絡めて，数量関係の総合問題としてよく出題されている。2次関数は毎年出題されている。また，毎年ではないが，数量関係の問題の中に図形が融合されて出題されることもある。確率は実はこの分野に含まれているが，毎年出題されている。中学校では，順列・組合せを学習していないので，全事象や該当する事象の数を上手に根気よく数える必要があるので，関心・意欲・態度をみるには最適な分野といえる。もれなく重複なく数え上げる技術と根性は高等学校においても必要な学力といえる。

資料の活用については，新課程の内容で昨年からの出題。度数分布表やデータからの読み取り・分析・立式・計算や代表値に関するものである。身近な話題をテーマに出題されている。

4．特徴的な問題例

【数と式】

> ①　$\left(\dfrac{938}{25}\right)^2-\left(\dfrac{937}{25}\right)^2$ を計算すると，$\square$ である。　（平成20年度　$\boxed{1}$）

学習指導要領解説（以下，指導要領と略記）によると

> 乗法公式は，逆に用いると因数分解の公式になる。因数分解は式変形の一つであるが，例えば，$13^2-12^2=(13+12)(13-12)=25$ のように変形することで，計算が容易になる。

となっているので，これに準拠した出題といえる。直接計算は厳しい。

> ②　$a=2-\sqrt{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}$ のとき，$a^2-3ab-18b^2=\square$ である。　（平成20年度　$\boxed{1}$）

これも指導要領によると，展開の公式のすぐ後に

> これらは，簡単でしばしば利用される典型的なものであり，公式のもつ意味とそれを利用することのよさを理解し，式を能率よく処理することができる

となっている。まず因数分解してから代入，計算をすると計算精度と所要時間に大差がつく。直接代入では大変。高校生なら常識であるが，意識の高い中学生なら十分できたようだ。

> ①　$\dfrac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-3)}{\sqrt{12}}$ を計算すると $\square$ である。　（平成25年度　$\boxed{1}$）

分子の右の括弧から $\sqrt{3}$ をくくり出し，分母と約分することにより，計算時間が半減できる。式全体を俯瞰して計算センス・発想力を駆使するか，地道に展開，分母の有理化をするかは人生の分かれ道であった。第1問目にしては，出来が悪かった。平素から計算上の工夫に心がけるという気構えが必要である。この習慣は，将来必ず身を助けることになる。

【図形】

> 朝日高校のオープンスクールに参加した朝雄さんは，校門横の大木（楠）の高さを知りたいと思いました。当日，次のことがわかりました。
>
> > 朝雄さんがある地点Pに立って木の先端を見上げると，見上げる角度が60°であった。また，木の根元と地点Pを結ぶ

直線上を地点 P から木より 30 歩だけ遠ざかった地点 Q に立って木の先端を見上げると，見上げる角度が 30° であった。

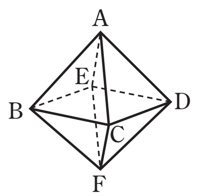
朝雄さんと木は地面に対して垂直に立っていると考え，朝雄さんの歩幅を 0.6m，目の高さを 1.6m，$\sqrt{3}=1.73$ として，木の高さを小数第 2 位を四捨五入して求めなさい。ただし，答えだけでなく，答えを求める過程がわかるように，途中の式や計算なども書きなさい。 （平成 25 年度 3）

朝日ゆかりの問題。身近な話題を素材とし，直接測定不能な木の高さを求めることで数学の実用性，良さが実感できる。木の根元と点 P の距離を未知数に設定して，無理数を含む 1 次方程式を立式して解いたあと，木の高さを求めるのが普通の解答であろうが，図形的センスがあれば，二等辺三角形に着目して，

$$0.6\times30\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1.6=9\sqrt{3}+1.6\fallingdotseq17.2$$

と一発で解答できる。これに近い解答をした者が数名いて感心した。しかし，未知数の設定のしかたがまずかったり，近似値を早い時期に代入したりと，生徒は悪戦苦闘していた。センスにより大差がついた問題であった。

⑤ 右の図のような 1 辺の長さが 2cm の正八面体について，面 ABE と平行な面は，面 ㋐ である。また，線分 AF の長さは ㋑ cm である。



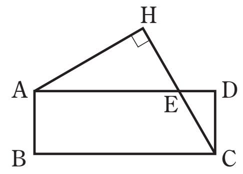
（平成 22 年度 1）

この問題は，空間図形の把握力，対称性の理解力を問うものである。指導要領によると

図形を対称性の観点からみる目を養うことによって，身の回りの世界の見方が広がるとともに，図形の考察の仕方が鋭くなり，図形の見方が豊かになる。

とある。線分 AF を点 A から平面 BCDE に引いた垂線の長さの 2 倍と捉えるのではなく，正方形 ABFD における対角線の長さと捉えれば，即座に答えは求まる。いろいろな角度から図形を眺め，直観力により求めるものを見破る典型的な例である。

右の図のように，長方形 ABCD があり，AB$=\sqrt{3}$ cm，AD$=5$cm である。辺 AD 上に，AE$=4$cm となる点 E をとり，点 A から直線 CE に垂線を引き，直線 CE との交点を H とする。



① 線分 AC の長さは ㋐ cmである。
また，∠DCE の大きさは ㋑ ° である。

② 線分 AC の中点を M とすると，∠DMH の大きさは ㋐ ° である。また，線分 DH の長さは ㋑ cm であり，△DHM の面積は ㋒ cm^2 である。 （平成 22 年度 2）

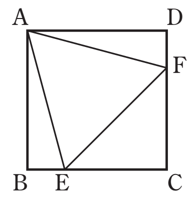
②は，∠D$=$∠H$=90°$ であるから，2 点 D，H は線分 AC を直径とする円周上に存在することに気づくかどうかで差がつく。図に円がないので，自分で円を描いて考える必要があり，案外難しい。①のおかげで，中心角が円周角の 2 倍ということを利用すれば∠DMH$=60°$ と求まり，DM$=$HM であるから，△DHM が正三角形と気づけば，解決する。

下の図のような線分 AB がある。線分 AB の中点 M を作図しなさい。さらに，線分 AB を斜辺とするような直角二等辺三角形 ABC を 1 つ作図しなさい。ただし，作図には定規とコンパスを使い，作図に使った線は消さないでおきなさい。

（平成 23 年度 3）

作図問題は，角の二等分線，線分の垂直二等分線，垂線の作図法が指導要領に掲載されている。自校作成問題でもこれをそのまま問うこともあったが，この問題はそれを融合して直角二等辺三角形を作図させている。偶然この年度の全県問題が線分の中点の作図であった（ちょうど本校の作図問題の前半部分）ので，格の違いが出た。

右の図のような正方形 ABCD がある。この正方形の辺 BC 上に点 E を∠AEB$=75°$ となるようにとり，辺 CD 上に点 F を∠AFD$=75°$ となるようにとる。また，点 A と点 E，点 A と点 F，点 E と点 F をそれぞれ結ぶ。



次の①では指示に従って答えなさい。②では ☐ に適当な式を書き入れなさい。また，③では，答えだけでなく，答えを求める過程がわかるように，途中の式や計算なども書きなさい。

① △AEF は正三角形であることを証明しなさい。

② AE$=x$cm とする。線分 CE の長さを x を用いて表すと，CE$=$ ☐ cm である。

③ 辺 AB の長さが $\sqrt{2}$ cm であるとき，線分 AE の長さを求めなさい。

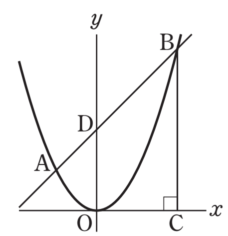
（平成 24 年度 4）

①正三角形の証明は珍しい。辺 EF の長さが不明であるから，3 辺が等しいことを示すのではない。したがって，二等辺三角形で頂角が 60° であることを示すことになる。そのためのステップとして，△ABE と△ADF が合同であることを証明するという方針を決定することが求められている。なお，指導要領の

二つの直角三角形について，
・斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいとき
・斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいとき
合同となる。

と混同した答案が散見されたが，ここは 1 辺と両端角が等しいことを使う判断をする。（指導要領では漢数字と算用数字の使い方の統一さえできていない。誠にお粗末。このような箇所は他にもある。）機械的に合同や相似の証明を問うのではなく，このようにいくつか考えられる証明の方針そのものを考えさせたい。②は③のためのヒントで，平均点管理や検査時間の短さを考えるとやむを得ない。③を完解できた生徒は，計量面における三平方の定理のよさを再認識できたことであろう。

右の図のように，原点 O と関数 $y=ax^2$（a は定数）のグラフがあり，このグラフ上に 2 点 A，B がある。点 A の x 座標は -2 で点 B の座標は (4, 8) である。また，点 B から x 軸に垂線をひき，x 軸との交点を C とし，直線 AB と y 軸との交点を D とする。



① $a=$ ㋐ であり，x の値が -2 から 4 まで増加するときの関数 $y=ax^2$ の変化の割合は ㋑ である。また，点 D の y 座標は ㋒ であり，台形 OCBD の面積は ㋓ である。

② 直線 $y=mx+2$ が台形 OCBD の面積を 2 等分するとき，定数 m の値を求めなさい。

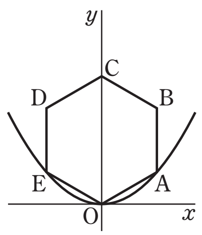
③ 直線 AB を軸にして，台形 OCBD を 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

（平成 25 年度 5）

③に関しては，大学入試では超難関大学において斜軸回転が頻出である。本問は計算上はもちろん無関係であるが，頭の中でイメージを想像することは大切であり，中学生へメッセージを残した。

検査会場で問題用紙を斜めにするなどの機転も試された。計算自体は，大きい円錐の体積の 2 倍から小さい円錐の体積の 2 倍を引くだけなので難しくはないが，東大文系などの入試問題同様にパズル的な発想力が必要で大差がついた。また，本校では今年も 2 次関数の問題を大問として出題し，2 次関数という重要分野の出題が見送られた全県問題とは好対照であった。

右の図のように，原点 O と，1 辺の長さが 2 の正六角形 OABCDE があり，関数 $y=ax^2$ のグラフは 2 点 A，E を通っている。ただし，a は正の定数である。



次の①では □ に適当な数を書き入れなさい。また，②，③では答えだけでなく，答えを求める過程がわかるように，途中の式や計算なども書きなさい。

① ∠AOC＝ ㋐ °であり，点 A の座標は ㋑ である。また，a＝ ㋒ である。

② 正六角形 OABCDE の面積 S を求めなさい。

③ 原点 O を通り，正六角形 OABCDE の面積を 3 等分する直線を ℓ，m とする。ただし，直線 ℓ の傾きは正の数である。このとき，直線 ℓ の傾きを求めなさい。

（平成 24 年度　5）

正六角形が出題されるのは目新しい。③で面積を 3 等分するのはどのような状況なのかを，図中に自分で直線を描いてみて考えることになる。面積を 2 等分する問題はよく見られるが，その知識・経験をどのように活かすかを問うている。範囲外の問題を出すはずはないので，三角形の面積の 2 等分に帰着する発想力をみている。

⑥ 右の資料は，ある中学校の 16 人の生徒の通学時間であり，最頻値（さいひんち）は 10，中央値は 12.5 である。ただし，x，y は自然数で，$x \leqq y$ である。このとき，x＝ ㋐ ，y＝ ㋑ である。（平成 25 年度　1）

通学時間（単位：分）

5	10	16	20	13	18
x	y	13	16	5	10
10	18	8	13		

新課程の問題である。資料を昇順に並べ直し，最頻値，中央値の定義さえ覚えていれば易しい。この分野は内容が少ないので，出題量も少なくなった。しかし，受検生の中には学習に偏りがある者もいて，白紙答案が散見されたのには驚いた。幅広い学習が望まれる。

5．おわりに

これまで，多くの方々の協力を戴き，本校は自校作成問題を世に出すことができた。地元紙では毎年取り上げられている。ただし，昨年度については，紙上の本校の問題において，図中の記号が脱落するという信じられぬミスがあった。新聞報道に正確性はない。謝罪文の掲載などの迅速な事後対応はなかった。関係各位にご心配をおかけし，電話もいただいた。自校作成問題対策のために中学生の塾通いが増加し，その延長として，本校生の通塾率が非常に高い。通塾を全面否定はしないが，学校での勉強との優先順位を間違えている者も多く，自校作成問題は弊害が多いことが明白となった。このあたりで抜本的な見直しが必要であることは言うまでもない。

また，今年度を最後に，諸問題が多かった普通科の自己推薦入試が廃止された。中学校の先生のお立場からすると「やっと廃止か」のご感触であろう。この間，教育現場は翻弄され続けたが，謝罪はなかった。

自校作成問題はそのときどきの教育課程を考慮し，練られた問題を世に出している。正規の業務をこなした上で，昼も夜も身を削るほどの激務。他の都道府県でも業務に携わっておられる先生方，誠にお疲れさまであります。皆さんにエールを送ることで，拙文を終了いたします。最後までおつきあいくださり，多謝。

【参考文献】

1　中学校学習指導要領（平成10年12月）
　解説－数学編－　平成11年９月文部省
2　岡山県立岡山朝日高等学校自校作成問題
　平成16年度～平成25年度
3　岡山朝日高等学校自校作成問題・数学を探る
　山川　宏史
　岡山朝日高校研究紀要 平成24年3月

山川 宏史　やまかわ ひろふみ

岡山市中区生まれ。岡山大学大学院理学研究科数学専攻修了。現在，岡山朝日高校教諭。専攻は，非可換環論におけるPolynomial Identity。趣味は，陶磁器蒐集（備前，伊万里，有田，薩摩切子など），和洋酒。特記事項は，献血500回達成，自転車通勤。座右の銘「一瞥即解」（無理かな）。根っからの自由人で束縛を嫌う（∴携帯電話は一生涯無理）。

特集 「数学活用」を利用したプレゼンテーション授業を実施して

海城高等学校　川崎真澄，原宗泰

ミニマス・フェスタを本校で

本誌Vol.4にて，大阪府立大手前高校の宮城憲博先生との共著で“マス・フェスタ”へ参加させて頂いた感激をつづりました。そして，その感激は，“本校版のマス・フェスタ開催を”との思いへと昂じ，今年2月25日（月）から3月4日（月）の約1週間，高校1年生の「数学Ⅰ」の授業にて，今回の新課程で登場した「数学活用」の教科書を利用してプレゼンテーションを行う，名付けて「高1ミニマス・フェスタ」へと結実しました。

高１ミニマス・フェスタ開催とそのねらい

高校1年生の，とりわけこの時期に開催したことには理由があります。これは，数列などの手法が身についていない中学段階ではこのような試みが難しいので，高校で行うべきであろうとの前提があり，加えて本校の現状を鑑みれば，受験学年である高3で行うことは適当であるとは言い難いと思われました。では，なぜ，高2ではなく，高1なのか？

それは，仮に（本校で）文理に分かれる高2次の，例えば理系で行った場合，「理系としての共通言語」を伝え手と受け手で共有していることを前提とできる分，専門性は高くなるかもしれませんが，その分「サークル内発表」の色合いが出てきてしまい，巧みに比喩などを用いて「どうにかして自分たちの主張を平易に伝えよう」という努力を必要としない可能性があります。理系志向の生徒は文系志向の生徒への（またその逆もしかり）説明に奮闘することを求めたいのです。

つまり，単なるプレゼンテーションではなく，文理混成の最後の時期の，多様な個性に対してのプレゼンテーションを敢行したいことによります。

進学校やSSHから注目される数学活用

現在，数学活用については必修ではないためか，教科書を刊行している出版社は啓林館と実教出版の2社に過ぎません。これは，数学活用が，前教育課程での「数学基礎」の名称変更では，と思われる節があったためではないか，との声をよく耳にします。

「数学基礎」が進学校で採用された事例は余り耳にしませんでしたが，この「数学活用」は進学校やSSH実施校から注目されているようです。なるほど，数学学習，ひいては数学研究の意欲向上を図る場合に，この数学活用の利用はこれに十分に資するからでありましょう。

開催に至るまでの進行

今回，年度末の最後の3回分（内1回は予備日）の授業を，数学活用を利用したプレゼンテーションとしました。実施予告は開催1ヶ月前とし，生徒は5人で1つのグループとなり，「数学活用」の教科書収録内容をはじめ，各自が興味深く思っている数学的素材をテーマとして掘り下げ，プレゼンテーションのために準備をすすめることとしました。

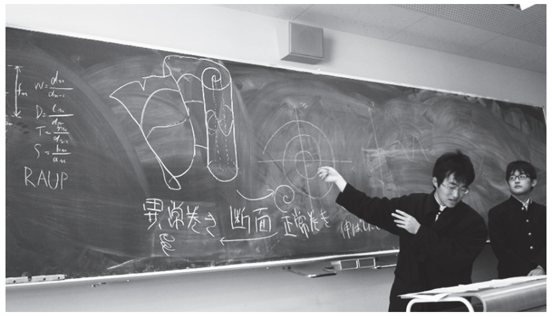
ただし，その準備は，原則として授業時間は費やさないようにしたので，生徒は放課後や休み時間，そして休日を返上して奮闘したようです。果たしてその発表は，いずれも興味深いもので，計56のプレゼンテーションとなりました。

以下は，7つあるクラスの中から2クラス（16グループ）分のタイトルを抜粋したものです：

（Ｘ組）
カルダノの公式・成立変遷記，○×ゲームの必勝法，ペンローズタイリング，
グラフ理論，種々のパラドックス，円周率の求め方，古代ギリシアの数学，ネピアの数
（Ｙ組）
ペンローズタイリング，ゼノンのパラドックス，オイラーの多面体定理，
線分を n 等分する方法，経路探索システム，メビウスの立体輪，カーマイケル数について，カテナリー曲線

プレゼンテーションの様子

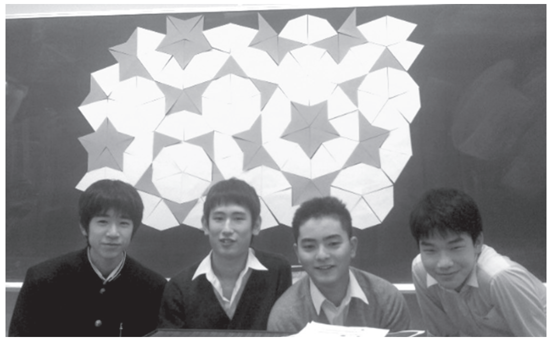
１グループの持ち時間は10分としました。プレゼンテーションの様子をご覧ください。



「自然界に見られる螺旋」

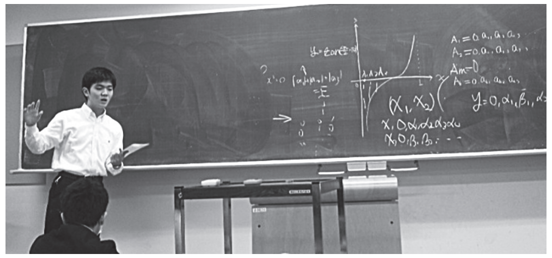
「カルダノの公式・成立変遷記」

この発表は劇仕立てで行われました。写真は，タルタリア（左）から甘言を弄して公式を聞き出したカルダノ（右）の場面です。

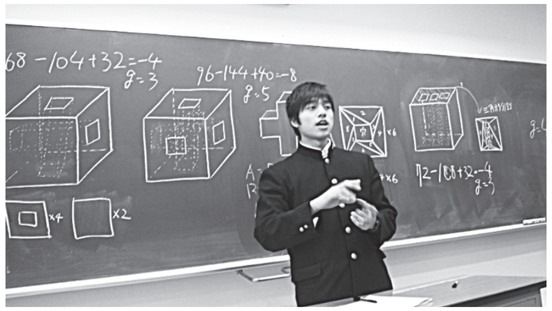


「ペンローズタイリング」

この発表の質疑応答の際，ペンローズタイリングに縁の深い「準結晶」（2011年ノーベル化学賞は，この結晶の発見に対して授与されています）の紹介を発表した写真の4人に対して，聴衆の中から「実は丁度昨日，それを作ることに成功したと思うのですが…」と披露した生徒が出現。あまりにタイムリーな展開に万雷の拍手が巻き起こりました。



「カントールと無限」



「一般化されたオイラーの多面体定理」

ミニマス・フェスタを終えてみて

プレゼンテーション終了後，マス・フェスタにおける報告書を模して，英文による概要を付した報告書を作成させ，約180ページからなる報告集を作成しました。その電子版を本校数学科ホームページに掲載してございます。ご覧いただければ幸いです。

http://www.kaijo.ed.jp/education/subjects/mathematics/pdf/2012_4math1.pdf

生徒は，「授業を準備時間にあてられないし，発表のためのパワーポイント原稿作りなどで大変だったけれど，報告集も作成でき，よい記念になりました」とか，「数学も他の学問同様，多くの先人たちによって作り上げられたことが実感できました。そう考えると，問題がすぐに解けなくても焦らずにじっくり考えてみようという気になりました」あるいは，「文理に分かれる前に数学に対する勉強のモチベーションが落ちる感じだったのですが，“楽しい数学”を見聞きできてまた頑張ってみようと思いました」など，生徒が活き活きとこの授業に臨んでいたことが分かり，実施した喜びと数学活用を利用した授業に対する“手ごたえ”を感じました。

導入後，日の浅いこともあって，まだまだ数学活用の実施に至る高校は少ないと耳にします。本稿が，数学活用導入を肯定的にとらえて頂く実践例としてお取り上げ頂ければ幸いです。

川崎 真澄　かわさき ますみ

東京都生まれ。東京理科大学理学工学部数学科卒業。埼玉大学理工学研究科修了。専攻は代数幾何学。博士（理学）。現在，私立海城学園数学科主任。趣味は古典芸能鑑賞。

原 崇泰　はら たかひろ

早稲田大学基幹理工学研究科博士前期課程修了後，私立海城学園に非常勤講師として勤務。現在に至る。趣味は山行とスキー。数学を通じて努力の大切さと尊さを学んで欲しく思います。

授業実践記録

フェルマー系列整数辺直角三角形及びハンドボールコート作成新方式の提案

学校法人富田学園岐阜東高等学校　亀井喜久男

整数辺直角三角形（いわゆるピタゴラス三角形）の中の３つの系列について説明します。

直角をはさむ辺の長いほうと斜辺の長さの差が１の系列があります。ピタゴラスの系列とされています。3，4，5の次は5，12，13。奇数が一個ありさえすればひとつ出来ます。まず二乗して１を引き２で割ります。はじめの奇数，２で割った商と，それに１を足した数で３つの数の組を作ればそれが原始ピタゴラス三角形となります。７の場合は二乗して49，１を引いて２で割り24，１を足して25。こうして7，24，25。

次は直角を挟むひとつの辺と斜辺の差が２である系列です。プラトンの系列と呼ばれています。４の倍数をひとつ準備します。半分にしてそれを２乗します。８のときにはまず16が出てきます。この数から１を引いて作る15，１を足して作る17とで３つ組を作ります。４の倍数からひとつの原始ピタゴラス三角形ができます。

どちらも証明は容易で，さらに無限個の原始ピタゴラス三角形が存在することを示しています。整数の分野が大学入試に入った以上原始ピタゴラス三角形関係の話題は多くなります。そのときサンプルが3，4，5や5，12，13だけでは寂しいでしょう。たとえば必ず５の倍数があることを証明せよと問われたとき7，8個見渡して実感してから証明に入るほうが自然と思うのです。だからシンプルな作成法は重要です。

新しい話題はフェルマーの系列です。フェルマーは，直角をはさむ２つの辺の長さが１だけしか違わない整数辺直角三角形が無限個あると言及しました。3，4，5の次は20，21，29，次は119，120，169です。さすがにこの系列は簡単な作り方はありませんでした。私は見渡しをしていて，1991年に面白い漸化式を発見し発表しました。

$a_0=0$，$b_0=1$，$c_0=1$，$a_1=3$，$b_1=4$，$c_1=5$

として

$$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n+2$$
$$b_{n+2}=6b_{n+1}-b_n-2$$
$$c_{n+2}=6c_{n+1}-c_n$$

隣接３項の漸化式によって作る a_n，b_n，c_n の３数の組はフェルマー系列になります。

さらにこの式から線形性を予感し行列方程式を立てました。結果は驚くべきものでした。

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 20 \\ 1 & 4 & 21 \\ 1 & 5 & 29 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 20 & 119 \\ 4 & 21 & 120 \\ 5 & 29 & 169 \end{pmatrix}$$

真ん中の行列の逆行列を両辺の右からかけたとき次々と出てくる1，2，3に仰天しました。３つの数の組を縦ベクトルとして下さい。この縦ベクトルに上の行列を左からかけて下さい。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 29 \end{pmatrix}$$

出来た縦ベクトルにまたこの行列をかけて下さい。そうすると次々とフェルマー系列の整数辺直角三角形の３つ組が生成されます。どんどん巨大化し12ステップで斜辺が十億の位の整数辺直角三角形ができます。$p_n=A^n p_0$ 三次元の等比数列がここにあります。

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	1
1	3	4	5
2	20	21	29
3	119	120	169
4	696	697	985
5	4, 059	4, 060	5, 741
6	23, 660	23, 661	33, 461
7	137, 903	137, 904	195, 025
8	803, 760	803, 761	1, 136, 689
9	4, 684, 659	4, 684, 660	6, 625, 109
10	27, 304, 196	27, 304, 197	38, 613, 965
11	159, 140, 519	159, 140, 520	225, 058, 681
12	927, 538, 920	927, 538, 921	1, 311, 738, 121

尚横ベクトルに右からこの行列をかけても同様です。これで 2 の平方根の逐次近似が出来ます。$c \div b$ は 12 回で 1.41421356 となります。

上手くいったところで，他の系列に適用してみました。

ピタゴラスの系列（斜辺と 1 辺が 1 の差）で行列を求めてみましょう。

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 12 & 24 \\ 5 & 13 & 25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 12 & 24 & 40 \\ 13 & 25 & 41 \end{pmatrix}$$

ここから得られる行列をピタゴラスの系列の行列と捉えることが出来ます。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

次はプラトンの系列（斜辺と 1 辺が 2 の差）

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 15 & 35 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 17 & 37 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 35 & 63 \\ 8 & 12 & 16 \\ 17 & 37 & 65 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

同様にこの行列はプラトンの系列の行列と捉えることが出来ます。統一性をもたせるためにフェルマーの系列の行列も 1 行と 2 行を入れ替えて

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

としました。

縦ベクトルの 3，4，5 から出発して，この 3 つの行列を左から次々と掛ける時，原始ピタゴラス三角形が次々に生成します。また先頭が奇数で後尾が斜辺であるところのどの原始ピタゴラス三角形も 3，4，5 から必ずたどって行けます。これを証明し整数論のH先生に届けました。類似の研究がアメリカにあるようだとのことでショックでした。しかしともかく自分自身の力で「3 進樹の節点にピタゴラス原始三角形が生成すること」にたどり着いたことに満足しました。数学の研究の面白さを味わいました。当時 3 進樹になることは多くの日本の高校の先生方に驚きをもって受け入れられました。日本では初見の行列セットでした。

3，4，5 を出発点している 3 進樹が原始ピタゴラス三角形をすべて規則的に構成していくことに感激しました。今から20年も前のことです。その後中心の幹のフェルマーの系列のものは漸化式も込みで数学検定協会の数学検定4段の問題になりました。

さて実用性へ話は戻ります。フェルマーの系列の 2 番手であるところの 20，21，29 は殆ど注目されてはいません。ここで 20，21，29 の魅力的な応用例を紹介します。じつは実用性が大変あることに気づきました。2012年夏に本校のハンドボール部顧問の牧野先生からハンドボールコートの良い作成法を問われました。そのときこの三角形を利用することを思いつきました。数学科同僚の諸先生，ハンド部顧問の先生方の協力を得て，さらに電算機部，放送部，ハンドボール部皆の協力を受けてYOUTUBEの動画が出来上がりました。

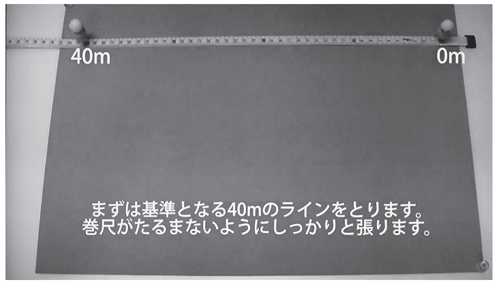
http://www.youtube.com/watch?v=V5hMbGmnfYU

「ハンドボールコート作成」で検索してください。または「エジプトひも」で検索してください。

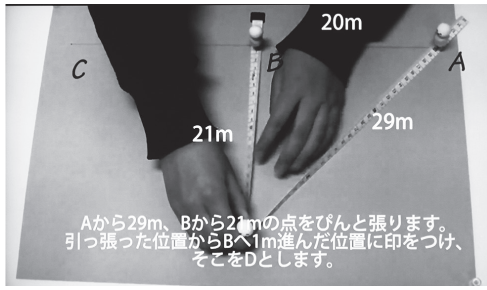
作成法紹介動画が見られます。幾何学の歴史やアイデアが散りばめてあります。数学の凄さや実用性を生徒諸君に伝えるにも役に立つ動画となったと考えています。2013年春現在3000VIEWを超えて広がりつつあり，また多くの外国でのVIEWを頂いています。英米独仏伊露，マカオ，デンマーク，シンガポール，チュニジア，ハンガリー，アイルランド，マレーシアで閲覧いただきました。このアイデアを授業でご活用下されば幸いです。また実際のハンドボールコートやフットサルのコートの作成に活用いただければ幸いです。確かに数学は役に立つ。そういってくれる生徒諸君を一人でも増やして数学の応援団を増員させましょう。

補足です。ピタゴラス三角形には必ず 3，4，5 の倍数があります。私はかつて背理法の意義をこの証明で納得しました。三平方の定理周辺にはまだまだ謎や面白話が存在するように思います。ともに探しましょう。

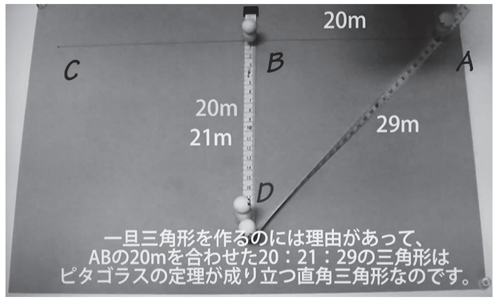
オープニング



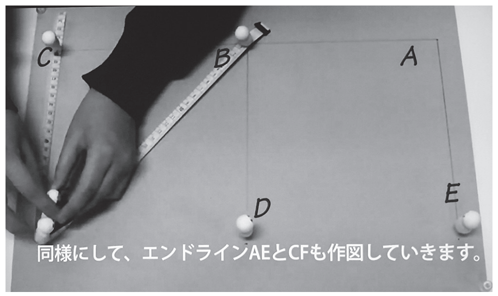
まずはサイドライン



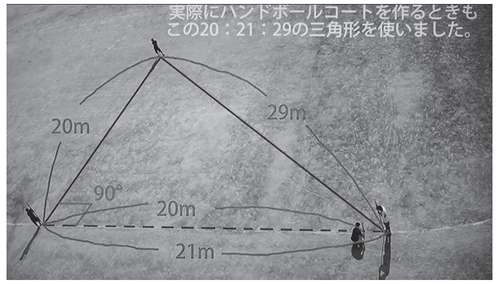
センターライン



直角となる根拠



エンドライン



実写版20:21:29


9mライン６ｍライン

挨拶

亀井 喜久男　カメイ キクオ

岐阜大学教育学部数学科出身，公立学校を経て私立岐阜東高校に勤務，現在に至る。岐阜県高数研数学教育研究委員も務めた。教材開発を重ね，数学史に題材を求めたエジプト紐，古墳時代の縄の数学を発表。主要論文業績
「高次元立方体の表現，数理科学」
「微積分学習への提言，数理科学」
「平方・平方根図式，数理科学」など。「ハンドボールコート作成の新方式20：21：29の活用」で注目されている。1955年，多治見北高校出身。

複素数平面の有用性を考える（その2）

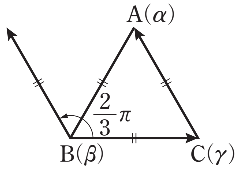
Focus Gold · Focus Up
編集委員
豊田 敏盟
Toshiaki Toyoda

1．複素数平面における正三角形の公式

本稿執筆のため，複素数平面に関する題材をあれこれ選んでいましたら，汎用性のありそうな次の正三角形に関する公式が目に留まりました。

【正三角形に関する公式】

複素数平面上で，異なる 3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ がこの順に反時計回りの位置にあるとき，



$\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ とすると，

$\triangle ABC$ は正三角形 $\Leftrightarrow$ $\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma=0$

【証明の概要】

$\triangle ABC$ が正三角形 $\Leftrightarrow$ $AC=BC$，$\angle ACB=\frac{\pi}{3}$ である。

このことから，異なる 3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ がこの順に反時計回りにあり，$\triangle ABC$ が正三角形であるための必要十分条件は，

「$\overrightarrow{BC}$ を頂点 B のまわりに $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転すれば，$\overrightarrow{CA}$ に等しい」である。

そこで，$\frac{2}{3}\pi$ だけ回転させる複素数 $\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ を使うと，

必要十分条件は，$\omega(\gamma-\beta)=\alpha-\gamma$，

つまり，$\alpha+\omega\beta-(\omega+1)\gamma=0$ ……①

ここで，ド・モアブルの定理から，

$$\omega^3=\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^3=1$$

また，$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ で，$\omega\neq1$ であるから，$\omega^2+\omega+1=0$

よって，$\omega+1=-\omega^2$，これを①に代入すると，$\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma=0$ が導かれる。

以上から，

$\triangle ABC$ が正三角形 $\Leftrightarrow$ $\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma=0$ ……②

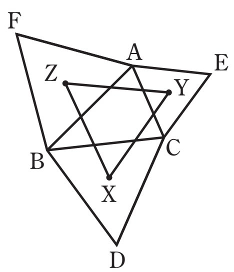
が成立する。

この②の公式を用いると，正三角形 ABC の 2 つの頂点を示す複素数がわかれば，もう 1 つの頂点は ω を使って容易に表すことができます。

ところで，正三角形といえば，次の「ナポレオンの定理」が思い出されます。

【ナポレオンの定理】

任意の三角形 ABC について，その外側に，各辺を 1 辺とする正三角形 CBD，ACE，BAF をつくり，それぞれの正三角形の重心を X，Y，Z とすれば，三角形 XYZ は正三角形である。



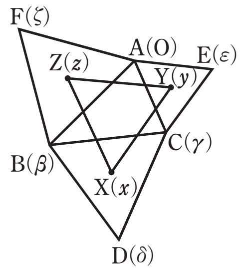
(3 つの正三角形を内側につくる場合でも，$\triangle XYZ$ は正三角形となる。この $\triangle XYZ$ をナポレオンの三角形という)

そこで，各辺を 1 辺とする正三角形を$\triangle ABC$ の 外側に描く場合の「ナポレオンの定理」について，FocusGold 数学Ⅲのコラムでの解説とは趣を変え，②の「正三角形に関する公式」を用いて証明してみます。

2．「ナポレオンの定理」の証明

複素数平面上の原点 O に頂点 A を定め，点 B，C，D，E，F，X，Y，Z を表す複素数をそれぞれ β，γ，δ，ε，ζ，x，y，z とする。

$\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ として，②の「正三角形に関する公式」を利用すると，正三角形 DCB から，



$\delta+\omega\gamma+\omega^2\beta=0$

よって，点 δ は，$\delta=-(\omega\gamma+\omega^2\beta)$ と表せる。

点 X は $\triangle DBC$ の重心より，

$$x=\frac{1}{3}(\delta+\beta+\gamma)$$

$$=\frac{1}{3}\{(1-\omega^2)\beta+(1-\omega)\gamma\} \text{ ……③}$$

正三角形 EAC から，$\varepsilon+\omega\cdot0+\omega^2\gamma=0$

よって，点 ε は $\varepsilon=-\omega^2\gamma$ と表せる。

点 Y は $\triangle EAC$ の重心より，

$$y=\frac{1}{3}(\varepsilon+0+\gamma)=\frac{1}{3}(1-\omega^2)\gamma \text{ ……④}$$

正三角形 FBA から，$\zeta+\omega\beta+\omega^2\cdot0=0$

よって，点 ζ は $\zeta=-\omega\beta$ と表せる。

点 Z は $\triangle FBA$ の重心より，

$$z=\frac{1}{3}(\zeta+\beta+0)=\frac{1}{3}(1-\omega)\beta \text{ ……⑤}$$

次に，$x+\omega y+\omega^2z$ に③，④，⑤を代入して計算すると，

$$x+\omega y+\omega^2z$$

$$=\frac{1}{3}\{(1-\omega^2)\beta+(1-\omega)\gamma\}$$

$$+\omega\cdot\frac{1}{3}(1-\omega^2)\gamma+\omega^2\cdot\frac{1}{3}(1-\omega)\beta$$

$$=\frac{1}{3}\{(1-\omega^2+\omega^2-\omega^3)\beta+(1-\omega+\omega-\omega^3)\gamma\}$$

$$=\frac{1}{3}\{(1-\omega^3)\beta+(1-\omega^3)\gamma\}$$

ここで，ド・モアブルの定理から，$\omega^3=1$

よって，$x+\omega y+\omega^2z=0$ となり，②の「正三角形に関する公式」から，3 点 $X(x)$，$Y(y)$，$Z(z)$ はこの順に反時計回りに正三角形の頂点である。

以上，【ナポレオンの定理】を複素数を用いて代数的に証明しました。同様な方法で，ナポレオンの三角形 XYZ の重心と三角形 ABC の重心は一致することも簡単に証明できます（Focus Gold 数学Ⅲ のコラム参照）。

さて，ナポレオンの名が付くこの定理ですが，彼が定理の確立にかかわったことを示す資料は発見されていないとのこと。ただ，ナポレオンは数学好きで，フーリエやラグランジュなどの数学者と交わりながら数学に取り組んだようです。

3．チェバ・メネラウスの定理を利用した「ナポレオンの点」の証明

ところで，ナポレオンの名の付くものに，次の「ナポレオンの点」があります。

【ナポレオンの点】

任意の三角形 ABC の外側に，各辺を 1 辺とする正三角形 CBD，ACE，BAF をつくり，それぞれの正三角形の重心を X，Y，Z とすると，3 本の直線 AX，BY，CZ は 1 点で交わる。この点をナポレオンの点という。

また，ナポレオンの点に似た定理として，次の「フェルマーの点」があります。

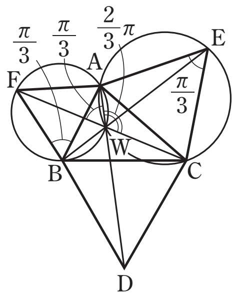
【フェルマーの点】

任意の三角形 ABC の外側に，各辺を 1 辺とする正三角形 CBD，ACE，BAF をつくり，直線 AD，BE，CF を引くと，この 3 本の直線は 1 点 W で交わる。この点 W をフェルマーの点という。

このフェルマーの点 W の存在を，$\triangle ABC$ の内角がいずれも $\frac{2}{3}\pi$ より小さい場合（点 W が$\triangle ABC$ の内部にある場合），幾何を使って証明すると次のようになります。

【フェルマーの点の証明】

△BAF の外接円と△ACE の外接円の交点を W とすると，



$$\angle AWF+\angle AWC$$
$$=\angle ABF+(\pi-\angle AEC)$$
$$=\frac{\pi}{3}+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$$

より，3 点 F，W，C は一直線上にある。同様に，3 点 E，W，B も一直線上にあることがわかる。

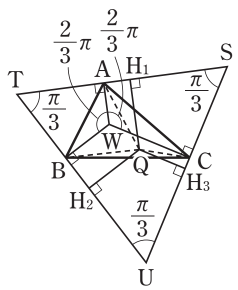
次に，$\angle BWC=2\pi-(\angle AWB+\angle AWC)$

$$=2\pi-\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi$$

より 4 点 B，D，C，W は同一円周上にあるから，上と同様に，3 点 D，W，A も一直線上にあることが証明できる。

したがって，直線 AD，BE，CF の 3 直線は，△BAF，△ACE，△CBD の外接円の交点 W で交わる。この点 W がフェルマーの点である。

なお，△ABC 内の点 Q のうち，QA+QB+QC が最も短くなる点 Q はフェルマーの点 W です。この証明にも簡単に触れておきましょう。



頂点 A を通り線分 WA に垂直な直線を引く。同様に，頂点 B を通り線分 WB に垂直な直線と，頂点 C を通り線分 WC に垂直な直線を引き，これらの直線の交点を図のように S，T，U とする。

このとき，$\angle AWB=\angle BWC=\angle CWA=\frac{2}{3}\pi$

より，$\angle S=\angle T=\angle U=\frac{\pi}{3}$ となり，△STU は正三角形である。

次に，△ABC 内の任意の点 Q から，正三角形 STU の各辺に垂線 QH_1，QH_2，QH_3 を引くと，

$$正三角形\ STU=\frac{1}{2}ST(WA+WB+WC)$$
$$=\frac{1}{2}ST(QH_1+QH_2+QH_3)$$

よって，$WA+WB+WC=QH_1+QH_2+QH_3$

また，$QH_1+QH_2+QH_3\leqq QA+QB+QC$ であるから，$WA+WB+WC\leqq QA+QB+QC$ となる。したがって，△ABC 内の任意の点 Q のうち，QA+QB+QC が最小となる点 Q はフェルマーの点 W である。

では，本題の「ナポレオンの点」の話に戻りましょう。私は「ナポレオンの点」の証明を，フェルマーの点と同様，幾何で証明しようと試みましたが挫折。これを幾何で解析することは，私の力では不可能と判断しました（ナポレオンは，「余の辞書に『不可能』はない」との言葉どおり可能ならしめたのでしょう）。ただし，いろいろな△ABC を描いてナポレオンの点の位置を探ると，その位置は△ABC の内角や辺の長さの比に左右されることを理解しました。

そこで，複素数平面上で「ナポレオンの点」の位置を捉えようと，「ナポレオンの定理」の証明と同様，頂点 A を原点 O に定め，点 B(β)，C(γ)，X(x)，Y(y)，Z(z) とし，また，$\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ を用いて幾つかの方法でチャレンジしました。例えば，ベクトルの一次独立性の考え方を応用して，線分 AX を $m:n$，線分 BY を $p:q$，線分 CZ を $s:t$（m，n，p，q，s，t は実数）に内・外分する点が一致すると仮定し，その点を複素数 β，γ，ω や実数 m，n などで表そうと試みました。また，同じような方法ですが，頂点 C と直線 AX，BY の交点 V(v) を結ぶ直線が点 Z を通ること（$v-\gamma=$ 実数$\cdot(z-\gamma)$ の成立）の証明にも取り組んでみました。

さらに，$x=n\beta+m\gamma$（m，n は実数）なら，直線 AX は辺 BC を $m:n$ に内・外分することから，実数 m，n を求めようともしました。でも，これらはすべて徒労に終わりました。

ただ，これらの試みの中で，前述の「ナポレオンの定理」の証明での③，④，⑤に，$\omega^2+\omega+1=0$ を使って，

$$\overrightarrow{AX}=x-0$$
$$=\frac{1}{3}\{(1-\omega^2)\beta+(1-\omega)\gamma\}$$
$$=\frac{1}{3}\{(2+\omega)\beta+(1-\omega)\gamma\}\ \cdots\cdots⑥$$
$$\overrightarrow{BY}=y-\beta$$
$$=\frac{1}{3}(1-\omega^2)\gamma-\beta$$
$$=\frac{1}{3}\{-3\beta+(2+\omega)\gamma\}\ \cdots\cdots⑦$$
$$\overrightarrow{CZ}=z-\gamma$$
$$=\frac{1}{3}(1-\omega)\beta-\gamma$$
$$=\frac{1}{3}\{(1-\omega)\beta-3\gamma\}\ \cdots\cdots⑧$$

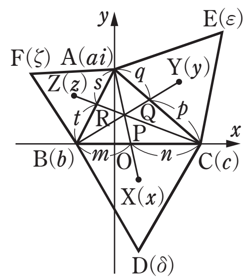
を導くと $\overrightarrow{AX}$，$\overrightarrow{BY}$，$\overrightarrow{CZ}$ は，それぞれ，辺 BC，CA，AB の内・外分に通じますし，仮に，⑥，⑦，⑧の $\dfrac{\beta の係数}{\gamma の係数}$ の積を計算すると，

$$\frac{2+\omega}{1-\omega}\cdot\frac{-3}{2+\omega}\cdot\frac{1-\omega}{-3}=1$$

となります。このことは，「チェバの定理・メネラウスの定理の逆」を暗示していると考え，その方向でアプローチすることにしました。その際，複素数の相等「m，n が実数のとき，$m+ni=0\Leftrightarrow m=0,\ n=0$」を用いる必要があることから，△ABC の頂点 A を虚軸上の ai（$a>0$）に，頂点 B，C を実軸上の b，c（$b<c$）に定めました。

それでは，ナポレオンの点の解析に関する私の考え方と証明の概要を述べてみましょう。

【ナポレオンの点の解析の考え方】



（その1）△ABC の頂点 A，B，C はこの順に左回りにあるとし，頂点 A を虚軸上に定め，その位置を表す複素数を ai，頂点 B，C を実軸上に定め，その位置を表す複素数をそれぞれ b，c とする。ただし，a，c は正数，$b<c$ とする。

（その2）$\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を使い，複素数の相等の考え方を利用する。

（その3）$\overrightarrow{AX}$ が辺 BC を $m:n$ に，$\overrightarrow{BY}$ が辺 CA を $p:q$ に，$\overrightarrow{CZ}$ が辺 AB を $s:t$ に内・外分するとして，$\frac{n}{m}$，$\frac{q}{p}$，$\frac{t}{s}$ をそれぞれ a，b，c で表し，それらの積$=1$ を証明する。ただし，m，n，p，q，s，t は実数で，$m+n=p+q=s+t=1$ とする。

【ナポレオンの点の証明の概要】

点 D，E，F，X，Y，Z を表す複素数をそれぞれ δ，ε，ζ，x，y，z とする。

$\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ と②の「正三角形に関する公式」を利用し，また，式の整理の途中，$\omega^2=-(\omega+1)$ と置き換え，x，y，z を a，b，c，ω で表すとする。

正三角形 DCB から，$\delta+\omega c+\omega^2 b=0$

よって，$\delta=-(\omega c+\omega^2 b)$

点 X は△DBC の重心より，

$$x=\frac{1}{3}(\delta+b+c)$$
$$=\frac{1}{3}\{(1-\omega^2)b+(1-\omega)c\}$$
$$=\frac{1}{3}\{(2+\omega)b+(1-\omega)c\}\ \cdots\cdots⑨$$

正三角形 EAC から，$\varepsilon+\omega\cdot ai+\omega^2 c=0$

よって，$\varepsilon=-a\omega i-\omega^2 c$

点 Y は△EAC の重心より，

$$y=\frac{1}{3}(\varepsilon+ai+c)$$

$=\frac{1}{3}(-a\omega i-\omega^2 c+ai+c)$

$=\frac{1}{3}\{-a\omega i+(\omega+1)c+ai+c\}$

$=\frac{1}{3}\{(1-\omega)ai+(2+\omega)c\}$ ……⑩

正三角形 FBA から，$\zeta+\omega b+\omega^2\cdot ai=0$

よって，$\zeta=-\omega b-\omega^2\cdot ai$

点 Z は △FBA の重心より，

$z=\frac{1}{3}(\zeta+b+ai)$

$=\frac{1}{3}(-\omega b-\omega^2\cdot ai+b+ai)$

$=\frac{1}{3}\{-\omega b+(\omega+1)ai+b+ai\}$

$=\frac{1}{3}\{(2+\omega)ai+(1-\omega)b\}$ ……⑪

次に，$\overrightarrow{\mathrm{AX}}$ が辺 BC を $m:n$（m，n は実数，$m+n=1$）に分ける点を P とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=j\overrightarrow{\mathrm{AX}}=n\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$j$ は実数）

が成り立つ。

$j\overrightarrow{\mathrm{AX}}=n\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は，

$j(x-ai)=n(b-ai)+m(c-ai)$

となる。⑨を代入すると，

$j\cdot\frac{1}{3}\{(2+\omega)b+(1-\omega)c-3ai\}$

$=n(b-ai)+m(c-ai)$

ここに，$2+\omega=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $1-\omega=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

を代入して，

$\frac{j}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)b+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)c-3ai\right\}$

$=n(b-ai)+m(c-ai)$

両辺を虚数単位 i で整理すると，

$\frac{j}{2}(b+c)+\frac{j}{6}(\sqrt{3}\,b-\sqrt{3}\,c-6a)i$

$=(nb+mc)-(ma+na)i$

a，b，c，j，m，n は実数より，複素数の相等から，実部は，$\frac{j}{2}(b+c)=nb+mc$

$n=1-m$ を代入して整理すると，

$j(b+c)=2\{(c-b)m+b\}$ ……⑫

虚部は，$\frac{j}{6}(\sqrt{3}\,b-\sqrt{3}\,c-6a)=-(ma+na)$

$m+n=1$ を代入して整理すると，

$j(\sqrt{3}\,b-\sqrt{3}\,c-6a)=-6a$ ……⑬

⑫，⑬から j を消去すると，

$2\{(c-b)m+b\}(\sqrt{3}\,b-\sqrt{3}\,c-6a)$
$+6a(b+c)=0$

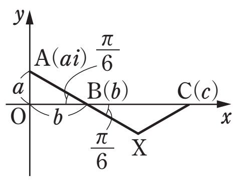
m で整理すると，

$(c-b)(b-c-2\sqrt{3}\,a)m=(c-b)(b-\sqrt{3}\,a)$

$c\fallingdotseq b$ より，$(b-c-2\sqrt{3}\,a)m=b-\sqrt{3}\,a$

$b=\sqrt{3}\,a$ とすると，$\angle\mathrm{ABO}=\frac{\pi}{6}=\angle\mathrm{CBX}$ より，

3 点 A，B，X および C，B，Z がそれぞれ一直線で，点 Z が実軸上にくるから，ナポレオンの点は頂点 B である。



$b\fallingdotseq\sqrt{3}\,a$ とすると，$b-c-2\sqrt{3}\,a\fallingdotseq0$ となり，

$m=\frac{b-\sqrt{3}\,a}{b-c-2\sqrt{3}\,a}$

また，$n=1-m=1-\frac{b-\sqrt{3}\,a}{b-c-2\sqrt{3}\,a}$

$=\frac{-(c+\sqrt{3}\,a)}{b-c-2\sqrt{3}\,a}$

よって，$\frac{n}{m}=\frac{-(c+\sqrt{3}\,a)}{b-\sqrt{3}\,a}=\frac{\sqrt{3}\,a+c}{\sqrt{3}\,a-b}$ ……(i)

（点 P は，$\sqrt{3}\,a>b$ なら辺 BC の内分点，$\sqrt{3}\,a<b$ なら外分点である）

$\overrightarrow{\mathrm{BY}}$ が辺 CA を $p:q$（p，q は実数，$p+q=1$）に分ける点を Q とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{BY}}=q\overrightarrow{\mathrm{BC}}+p\overrightarrow{\mathrm{BA}}$（$k$ は実数）

が成り立つ。

$k\overrightarrow{\mathrm{BY}}=q\overrightarrow{\mathrm{BC}}+p\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ は，

$k(y-b)=q(c-b)+p(ai-b)$

となる。

⑩を代入すると，

$\frac{k}{3}\{(1-\omega)ai+(2+\omega)c-3b\}$

$=q(c-b)+p(ai-b)$

ここに，$1-\omega=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $2+\omega=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

を代入して，

$\frac{k}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)ai+\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)c-3b\right\}$

$=-(p+q)b+qc+pai$

$q=1-p$ を代入し，両辺を虚数単位 i で整理すると，

$\frac{k}{6}\{(\sqrt{3}\,a+3c-6b)+(3a+\sqrt{3}\,c)\,i\}$

$=(-b+c-pc)+pai$

以下，前述と同様に，複素数の相等から，実数 p，q を a，b，c で表すと，

$p=\frac{(c-b)(\sqrt{3}\,a+c)}{a^2-2\sqrt{3}\,ab+2\sqrt{3}\,ac+c^2}$,

$q=\frac{a^2-\sqrt{3}\,ab+\sqrt{3}\,ac+bc}{a^2-2\sqrt{3}\,ab+2\sqrt{3}\,ac+c^2}$

よって，

$\frac{q}{p}=\frac{a^2-\sqrt{3}\,ab+\sqrt{3}\,ac+bc}{(c-b)(\sqrt{3}\,a+c)}$ $(c\fallingdotseq b)$ ……(ii)

$\overrightarrow{\mathrm{CZ}}$ が辺 AB を $s:t$（s，t は実数，$s+t=1$）に分ける点を R とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=l\overrightarrow{\mathrm{CZ}}=t\overrightarrow{\mathrm{CA}}+s\overrightarrow{\mathrm{CB}}$（$l$ は実数）

が成り立つ。

$l\overrightarrow{\mathrm{CZ}}=t\overrightarrow{\mathrm{CA}}+s\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は，

$l(z-c)=t(ai-c)+s(b-c)$

となる。

⑪を代入すると，

$\frac{l}{3}\{(2+\omega)ai+(1-\omega)b-3c\}$

$=t(ai-c)+s(b-c)$

ここに，$2+\omega=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $1-\omega=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

を代入して，

$\frac{l}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)ai+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)b-3c\right\}$

$=-(s+t)c+sb+tai$

$t=1-s$ を代入し，両辺を虚数単位 i で整理すると，

$\frac{l}{6}\{(-\sqrt{3}\,a+3b-6c)+(3a-\sqrt{3}\,b)i\}$

$=(-c+sb)+(1-s)ai$

以下，前述と同様に，複素数の相等から，実数 s，t を a，b，c で表すと，

$s=\frac{a^2-\sqrt{3}\,ab+\sqrt{3}\,ac+bc}{a^2-2\sqrt{3}\,ab+2\sqrt{3}\,ac+b^2}$,

$t=\frac{(c-b)(\sqrt{3}\,a-b)}{a^2-2\sqrt{3}\,ab+2\sqrt{3}\,ac+b^2}$

よって，

$\frac{t}{s}=\frac{(c-b)(\sqrt{3}\,a-b)}{a^2-\sqrt{3}\,ab+\sqrt{3}\,ac+bc}$ ……(iii)

以上，(i)，(ii)，(iii)から，三角形 ABC において，

$\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}\cdot\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}=\frac{n}{m}\cdot\frac{q}{p}\cdot\frac{t}{s}$

$=\frac{\sqrt{3}\,a+b}{\sqrt{3}\,a-b}\cdot\frac{a^2-\sqrt{3}\,ab+\sqrt{3}\,ac+bc}{(c-b)(\sqrt{3}\,a+c)}\cdot$
$\frac{(c-b)(\sqrt{3}\,a-b)}{a^2-\sqrt{3}\,ab+\sqrt{3}\,ac+bc}=1$

が成立する。

したがって，チェバの定理の逆から，3 つの直線 AX，BY，CZ は一点（ナポレオンの点）で交わる。

「ナポレオンの定理」や「ナポレオンの点」は比較的単純な図であっても，幾何で証明するのはなかなか困難です。でも，複素数平面の有用性を活かすと，高校生でも十分に取り組めるものであり，科目「数学活用」の教材としていかがでしょうか。

2013 年度入試の気になる1問

Focus Gold・Focus Up
編集委員
竹内 英人
Hideto Takeuchi

前回のGold通信では，東大・京大の問題についての講評を通して日々の指導について振り返ってみました。今回も2013年の気になる1問を取り上げ，色々と考えてみたいと思います。今回の問題は次の1題です。

［名大 理系②］
$x>0$ とし，$f(x)=\log x^{100}$ とおく。
(1) 次の不等式を証明せよ。
$$\frac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\frac{100}{x}$$
(2) 実数 a の整数部分（$k\leqq a<k+1$ となる整数 k）を $[a]$ で表す。整数 $[f(1)]$，$[f(2)]$，$[f(3)]$，…，$[f(1000)]$ のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば $\log 10=2.3026$ として計算せよ。

受験問題に詳しい先生方にとっては，この問題の類題として，以下の1998年の東大理科，1995年の早稲田の商学部を連想されることと思います。

実数 a に対して $k\leqq a<k+1$ をみたす整数 k を $[a]$ で表す。n を正の整数として，
$$f(x)=\frac{x^2(2\cdot 3^3\cdot n-x)}{2^5\cdot 3^3\cdot n^2}$$
とおく。$36n+1$ 個の整数
$[f(0)]$，$[f(1)]$，$[f(2)]$，…，$[f(36n)]$ のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。
（98.東大.理科）

(1) 不等式 $\dfrac{1995}{n}-\dfrac{1995}{n+1}\geqq 1$ をみたす最大の正の整数 n を求めよ。
(2) 次の 1995 個の整数の中に異なる整数は何個あるか。その個数を求めよ。
$$\left[\frac{1995}{1}\right], \left[\frac{1995}{2}\right], \left[\frac{1995}{3}\right], \cdots, \left[\frac{1995}{1994}\right], \left[\frac{1995}{1995}\right]$$
（1995早大・商）

このように，過去に類題が出されているのにも関わらず，今回この1題を取り上げたのには理由があります。それは，出題者の出題意図が明確に表れている良問だと感じたからです。入試問題の出題者は，自分の大学と同等レベルの大学の問題についてはかなりしっかりと目を通しています。特に，国立の難関大ではその傾向が強いようです。恐らく名古屋大学の出題者は東大もしくは早大の問題をチェックしていたことでしょう。しかしながら，東大のようにノーヒントでは難しすぎる。逆に，早大の（1）のようにヒントをつけてしまうと面白くない。そこで，東大と早大の間をとって（1）でヒントを与え，それを用いて（2）を考えるという誘導問題にしました。しかも，いかにも誘導といった形ではなく，いかに (1) を利用するかを見抜かなくてはならない問題となっています。この点で，両校の出題に比べ非常に教育的配慮が成された一問だと思います。

さて，この問題のポイントとなる知識は（Ⅰ）平均値の定理（Ⅱ）ガウス記号の2つですが，名大レベルを受験する生徒にとっては，上の（Ⅰ），（Ⅱ）については，当然知識として持っていることでしょう。ただ，この問では単に「知識として知っている」というレベルでは不十分です。それぞれの内容がどういう意味を持っていて，どういう場面で使われるのかということを正しく把握している必要があります。そこで，先生方にはひとまずこの2つのポイントとなる「平均値の定理」と「ガウス記号」について，普段の授業において，どのような点に注意して指導されているか思い出した上で以下を読んでいただければと思います。

「平均値の定理」はいわゆる「存在定理」で高校の教科書では，グラフを用いた直観的な説明が成されています（FocusGold数学Ⅲ（新課程版）のp.391～392のコラムでは詳しい証明が載せてあります）。

平均値の定理の指導のポイントは，その役割 (使い道）を正しく理解させることです。これを怠ると，典型的な問でしか使えるようになりません。「平均値の定理」の役割は以下の2つです。

① 関数の増減についての一般論を示す
（特に具体的な関数式が与えられていないときに有効。例えばグラフの凹凸の一般論を示すときなどに利用）

② $f(b)-f(a)$ と $b-a$，$f'(c)$ の関係の明確化
（入試ではこちらが中心であり，代表的な問としては不等式の証明，または，関数 $f(x)$ について差 $f(b)-f(a)$ の定量が難しいとき，その導関数 $f'(x)$ を用いて，差を別の表現で表すこと）

続いて，「ガウス記号」についての確認です。ガウス記号については旧課程においても定義つきで入試に出題されていましたが，新課程で「整数」が入ってきたことにより，今後，出題は増えると予想されます。「ガウス記号」については参考書等では

（ア）$x-1<[x]\leqq x$，（イ）$[x]\leqq x<[x]+1$

が中心に取り上げられていますが，「ガウス記号」においても，その（入試における）役割について確認しておきましょう。

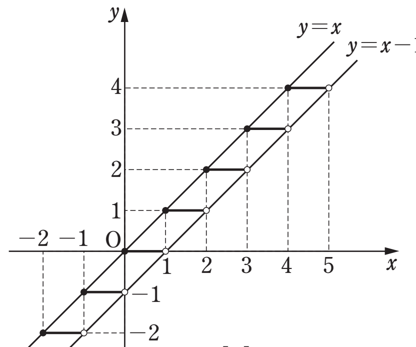
① 整数問題に関するもの，特に倍数・素因数の個数に関する問題

② ガウス記号に関する不等式 (上記の (ア)，(イ)) と「はさみうちの原理」を用いて極限値を求める問題

③ ガウス記号の意味そのものに関する問題（ガウス記号を含む等式やグラフに関する問題）

では本題に戻りましょう。(1) は典型的な平均値の定理の②に関する問です。問題は（2）です。この問ではガウス記号について性質（ア)，(イ）を丸暗記しているだけでは，(1) の結果とどうつながるか見えてきません。そこで，ガウス記号についてもう少し詳しく見ておきましょう。

(ア) の性質をグラフに表すと次のようになります。



$y=[x]$ のグラフ

つまり，$y=[x]$ のグラフは任意の x で $y=x-1$ と $y=x$ の間に挟まれ，（等号は x が整数のとき）これは同時に $y=[x]$ のグラフにおいては，$x_1>x_2$ のとき，

$x_1-x_2<1 \rightarrow [x_1]-[x_2]=0$ または 1

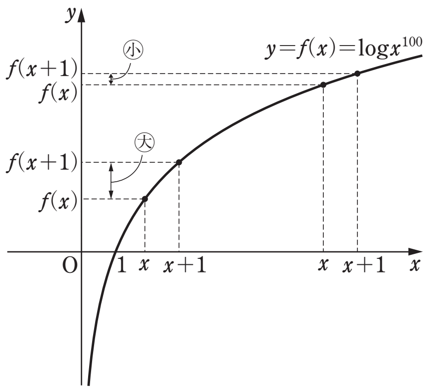
$x_1-x_2\geqq 1 \rightarrow [x_1]-[x_2]\geqq 1$

であることが読み取れます。

これを例え話でいえば（よくある例ですが)，$y=[x]$ の横軸を走行距離，縦軸をタクシー料金とすると，走行距離の差が 1km 未満であれば，メーターはそのままかワンメーターの違い，走行距離の差が 1km あれば，100%，ワンメーター以上の違いが生じ，代金が上昇するということです。ここまでで本問を解くための準備は整いました。この名古屋大学の問題では，$y=f(x)=\log x^{100}$ という関数について $[f(x)]$ を分析してみようというのがテーマです。

ここでポイントとなるのは $[f(x)]$ の具体的な値ではなく，$[f(1)]$，$[f(2)]$，……，$[f(1000)]$ のうち，異なるものの個数を求めるという点です。要は，$x_1<x_2$ のとき，$[f(x_1)]$ と $[f(x_2)]$ の値が等しいか異なるかを問う問題となっています。これは先ほどのガウス記号の話に帰着すれば，

$y=f(x)=\log x^{100}=100\log x$ のグラフを考えたとき，$f(x+1)$ と $f(x)$ の差がどれだけかという話になります．次の図の通り，$y=f(x)=\log x^{100}$ のグラフは，上に凸の単調増加関数で，x が大きくなるほどその増加はゆるやかになります。つまり，x が大きくなるにつれ，差 $f(x+1)-f(x)$ は小さくなります。



すなわち，x の範囲によって，

(i) $f(x+1)-f(x)\geqq 1$

$\longleftrightarrow$ $[f(x+1)]-[f(x)]\geqq 1$

(ii) $0<f(x+1)-f(x)<1$

$\longleftrightarrow$ $[f(x+1)]-[f(x)]=0$ または 1

に場合分けされます。この場合分けは $y=f(x)$ のグラフを眺めているだけでは詳しい分析できません。そこで「平均値の定理」の登場です。つまり，「平均値の定理」はグラフによる直観的な考察をより厳密な式の表現に直し考察する道具です。このあたりは，Focus Gold数学Ⅲ新課程版のp457に掲載のColumn「中間値の定理・平均値の定理～グラフと式をつなぐもの」をご参考ください。

すると，(1)の結果より，

(i) $x=1$〜99 までは，

$$1=\frac{100}{99+1}<\frac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)$$

となり， $[f(x)]\neq[f(x+1)]$

$[f(1)]<[f(2)]<f(3)<\cdots<[f(99)]<[f(100)]$

よって，100 個

(ii) $x=100$〜1000 までは，

$$f(x+1)-f(x)<\frac{100}{x}\leqq\frac{100}{100}=1$$

したがって，$0<f(x+1)-f(x)<1$ となり，

$[f(x+1)]-[f(x)]=0$ または 1

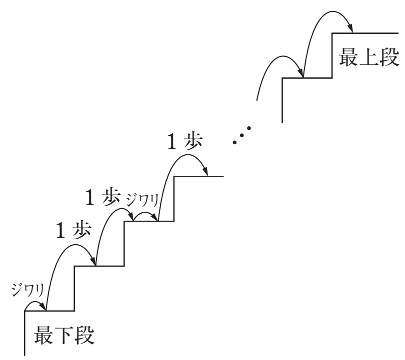
よって，$[f(x+1)]=[f(x)]$ または

$[f(x+1)]=[f(x)]+1$ $\cdots*$

ここで，$[f(100)]=460$，$[f(1000)]=690$

したがって，$[f(100)]$〜$[f(1000)]$ は 460〜690 のすべての値をとる。

ここで，注意したいのは，すべての値をとるということです。この部分にピンと来ない生徒が多いようです。そこで少し例え話で考えてみます。$*$より，$y=[f(x)]$ は x が 1 増えたとしても，y は同じか 1 増えるとうことで一気に 2 以上増えることはないということです。これは，階段でいえば，次の図のようになります。



これは，同じ階段上を，ジワリと進むか，一歩ずつ登るかしかないので，結局，最上段まで行くには，すべての階段を踏みしめていかなければならないということです。よって，$[f(100)]=460$(最下段) から $[f(1000)]=690$ (最上段) まで行くには，460〜690 までのすべての階段を踏まなければならないということです。

よって，(i)，(ii)より，$[f(1)]$，$[f(2)]$，…，$[f(1000)]$ のうち，異なる値となるのは，

$$\underbrace{100}_{\text{(i)}}+\underbrace{(690-460+1)}_{\text{(ii)}}-\underbrace{1}_{[f(100)]\text{は2回数えている。}}=330\ (\text{個})$$

となります。

今回，この問題を2013年の1問として取り上げたのは，先にも述べたように問題の構成に非常に教育的配慮を感じるとともに，単なる知識として丸暗記しているだけでは歯が立たず，日ごろから定理の導かれる過程やその使い道，また，それらの知識を有機的に結び付けることができるかどうか，すなわち，日ごろの学習の姿勢が問われる問題だと考えたからです。これは，生徒自身だけの問題ではなく，我々教師にとっても，日ごろの指導が問われる問題でもあります。単に，演習量を増やしたり，丁寧に解説するだけではなく，定義，定理，公式といった1つ1つの知識をいかに体系化して有機的に教えることができるかどうかが大きなカギとなります。

また，今回の名大の問題は，東大，早大の問題を足して2で割ったような問題ですが，これは我々，教師の作問のヒントにもなります。たとえば，ある問題を作るとき，同テーマの問題について設定レベルのワンランク上の大学と同等もしくはワンランク下の問題に注目し，問題の設定や誘導の方法を変えるという方法です。

特に若い先生方が実力テストの問題などを作るとき，初めからオリジナルな問題を作るのは難しいので，まずはこうしたところから始めるとよいでしょう。おすすめの題材としては，京都大学の問題です。京大の問題は，ほとんど小問がないので，それらを，少しアレンジして小問に分けて出題するというのは，良い作問トレーニングになります。ぜひやってみてください。(これは生徒自身にも実践させても効果大なのでおすすめです。)