関数のグラフと方程式

今回の授業の基本事項

グラフと方程式，不等式の関係

$f(x) > 0$

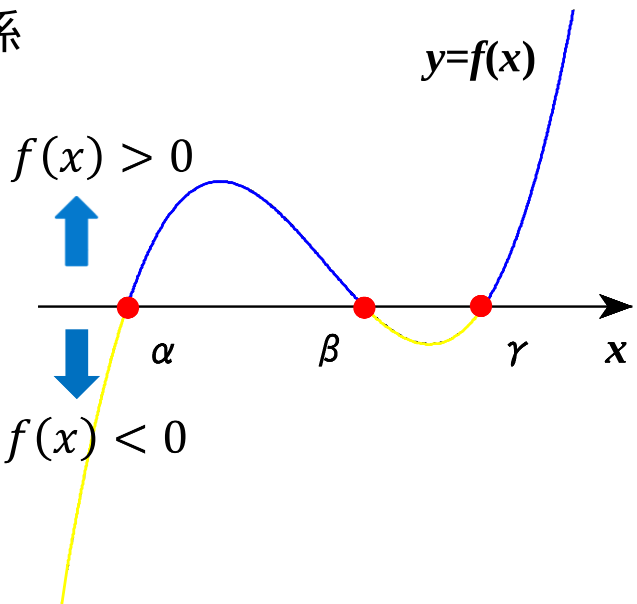
$\alpha < x < \beta \quad \gamma < x$

$f(x) = 0$

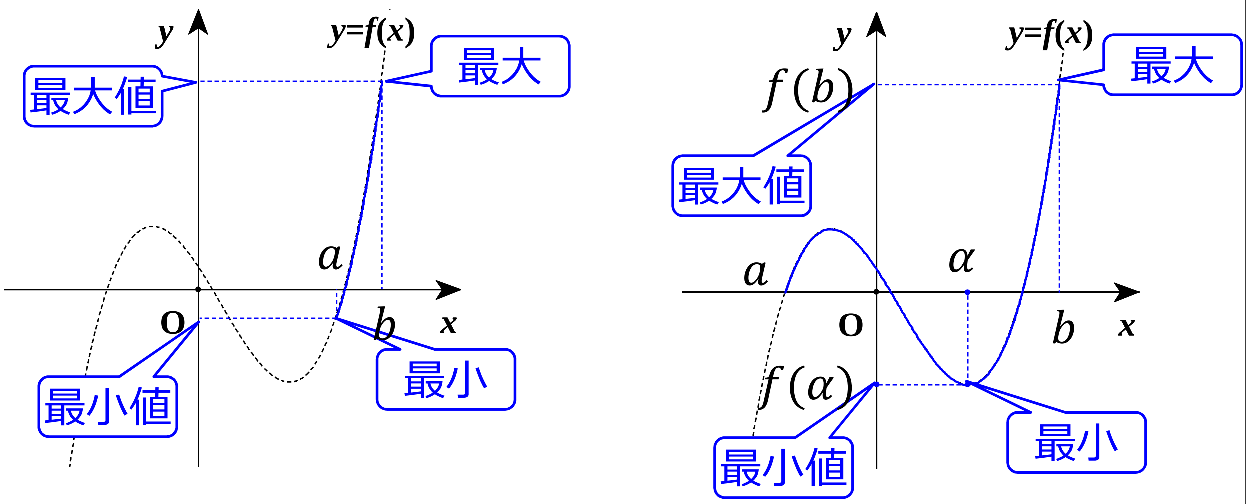
$x = \alpha, \beta, \gamma$

$f(x) < 0$

$x < \alpha \quad \beta < x < \gamma$



グラフと最大・最小



1　どんな実数 x をとっても $x^2-3x+2>0$ または $x^2+ax+1>0$ の，少なくとも一方を満足するような，a の値の範囲を求めよ

どこから解いていくか？

⇩

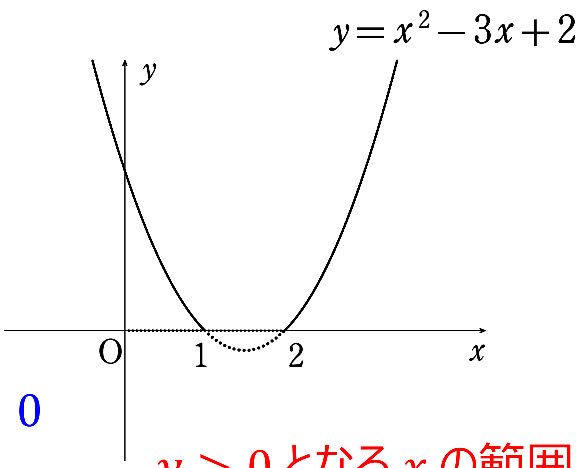
$x^2-3x+2>0$

⇩

$x<1\ ,2<x$

⇩

$1 \leqq x \leqq 2$ で常に$x^2+ax+1>0$ が成り立てばよい

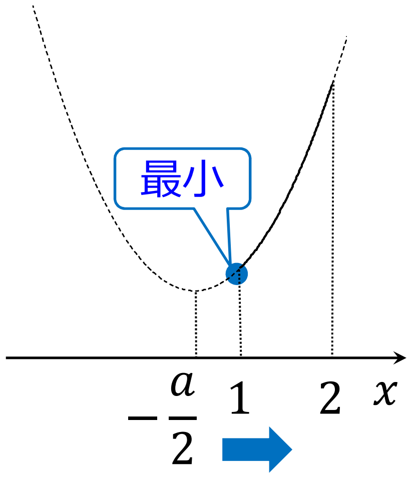


$y>0$ となる x の範囲

$1 \leqq x \leqq 2$ で常に$x^2 + ax + 1 > 0$ が成り立てばよいとは？

⇩

$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で最小値が正



$x = -\frac{a}{2}$ と1，2の大小関係は？

(i)　$-\frac{a}{2} < 1$ のとき

⇩

$a > -2 \cdots$ ①のとき

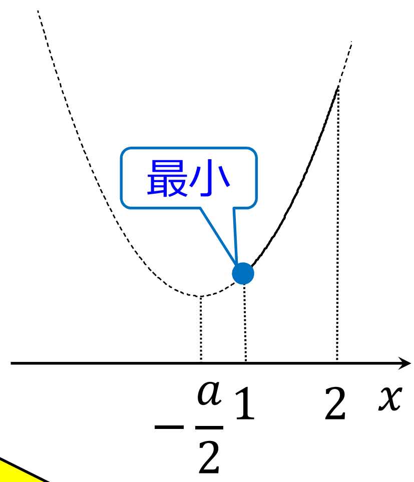
$x = 1$ のときに最小

⇩

$f(1) = 1 + a + 1 > 0$

$a > -2$

①より，$a > -2$



どの範囲で考えているか確認

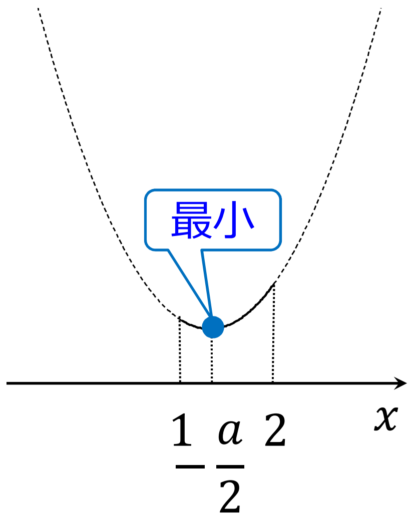
(ii) $1 \leqq -\frac{a}{2} \leqq 2$ のとき

$-4 \leqq a \leqq -2 \cdots$ ② のとき

$x = -\frac{a}{2}$ のときに最小

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 1 > 0$$

$-2 < a < 2$ ②より，解なし



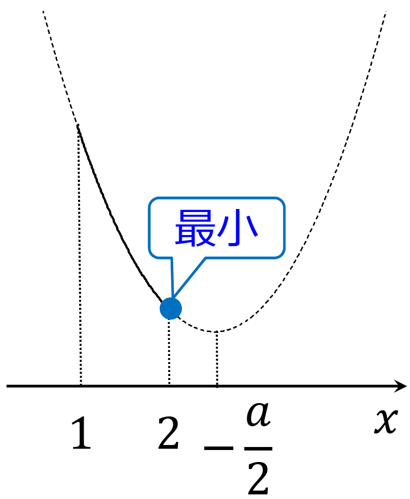
(iii) $2 < -\frac{a}{2}$ のとき

$a < -4 \cdots$ ③ のとき

$x = 2$ のときに最小

$$f(2) = 4 + 2a + 1 > 0$$

$a > -\frac{5}{2}$ ③より，解なし



(ｉ)～(iii)より，$a > -2$

2　a を実数の定数とする．x の関数 $f(x)=x|x-2a|$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を M とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　M を a を用いて表せ．

1と同様にグラフで考える

$$f(x)=x|x-2a|$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} x(x-2a) & (x \geqq 2a) \\ x(-x+2a) & (x<2a) \end{cases} \qquad |A|=\begin{cases} A\ (A \geqq 0) \\ -A\ (A<0) \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x(x-2a) & (x \geqq 2a) \\ x(-x+2a) & (x<2a) \end{cases}$$

$2a>0$ のときの例

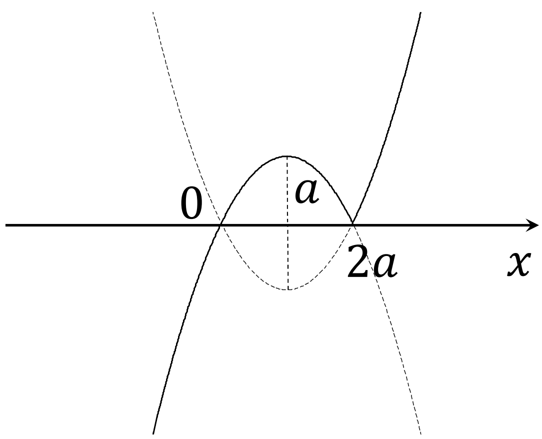
$$\Downarrow$$

$x \geqq 2a$ のとき

$$f(x)=x^2-2ax$$
$$=(x-a)^2-a^2$$

$x<2a$ のとき

$$f(x)=-x^2+2ax$$
$$=-(x-a)^2+a^2$$

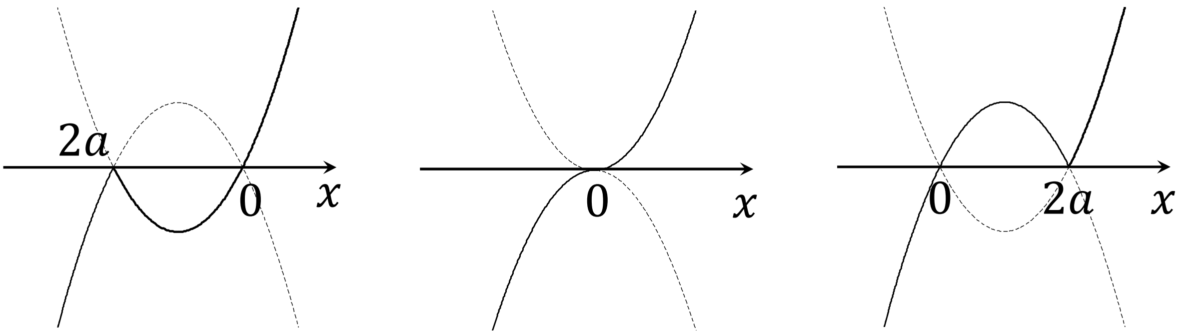


0，a，$2a$ の大小関係は？

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2a) & (\, x \geqq 2a \,) \\ x(-x+2a) & (\, x < 2a \,) \end{cases}$$

$\Downarrow$

ア　$2a < 0$ のとき　　イ　$2a = 0$ のとき　　ウ　$2a > 0$ のとき



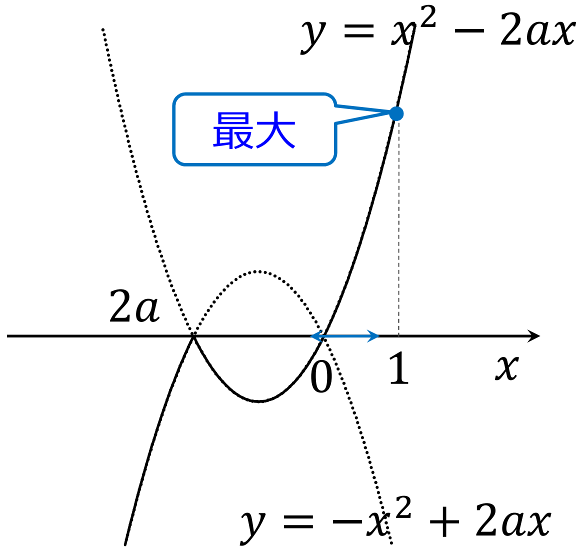
アとイでは $x \geqq 0$ では単調増加　　$2a$ と 1 の大小関係？

(Ⅰ) $2a \leqq 0$ のとき

$\Downarrow$

$a \leqq 0$ のとき

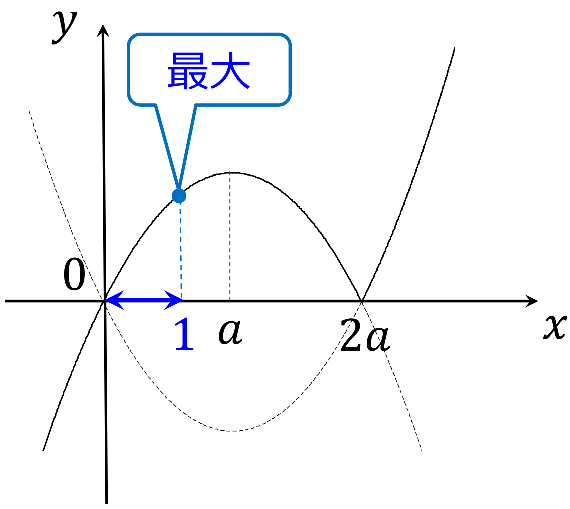
$M = f(1) = 1 - 2a$



(Ⅱ) $2a > 0$ のとき

(i) $a > 1$ のとき

$M = f(1)$
$\quad = 2a - 1$



$0 < a < 1$ のとき

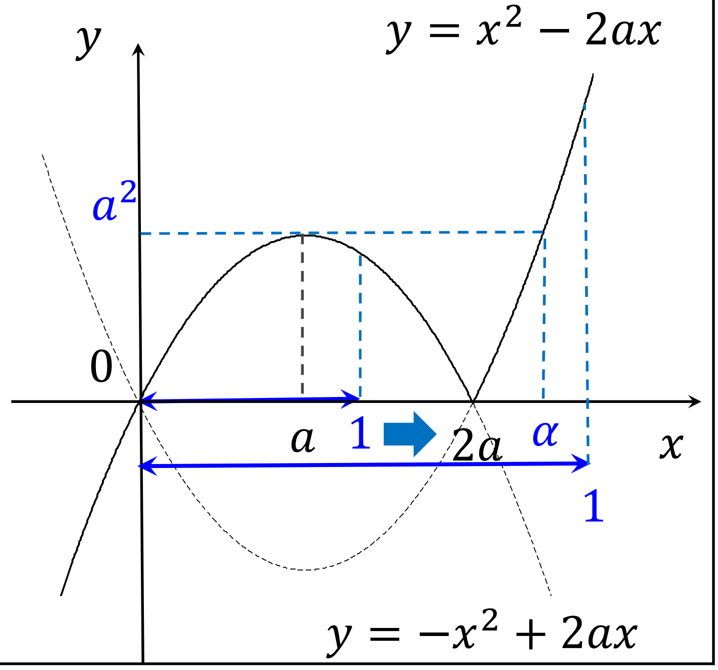
$\alpha^2 - 2a\alpha = a^2$

⇩

$\alpha = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)a$

⇩ $a < \alpha$

$\alpha = \left(\sqrt{2} + 1\right)a$

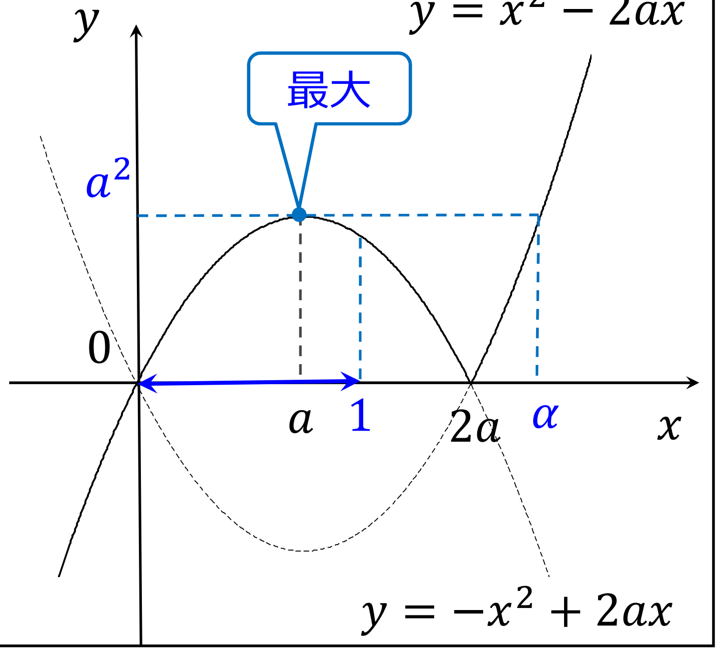


(ii) $a \leqq 1 < \alpha = (\sqrt{2}+1)a$ のとき

⇩

$\sqrt{2}-1 \leqq a < 1$ のとき

$$M = f(a) = -a^2 + 2a^2 = a^2$$

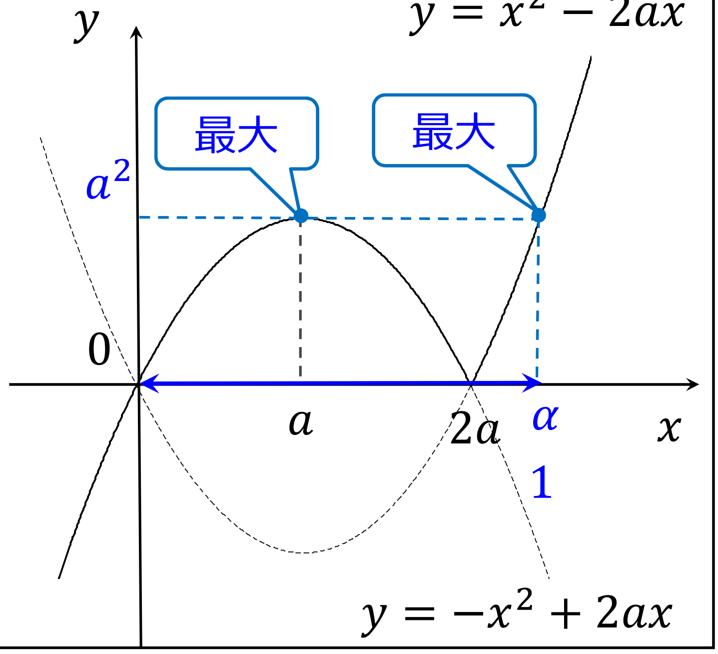


(iii) $\alpha = (\sqrt{2}+1)a = 1$ のとき

⇩

$a = \sqrt{2}-1$ のとき

$x = a, (\sqrt{2}-1)a$ のとき
$M = a^2$



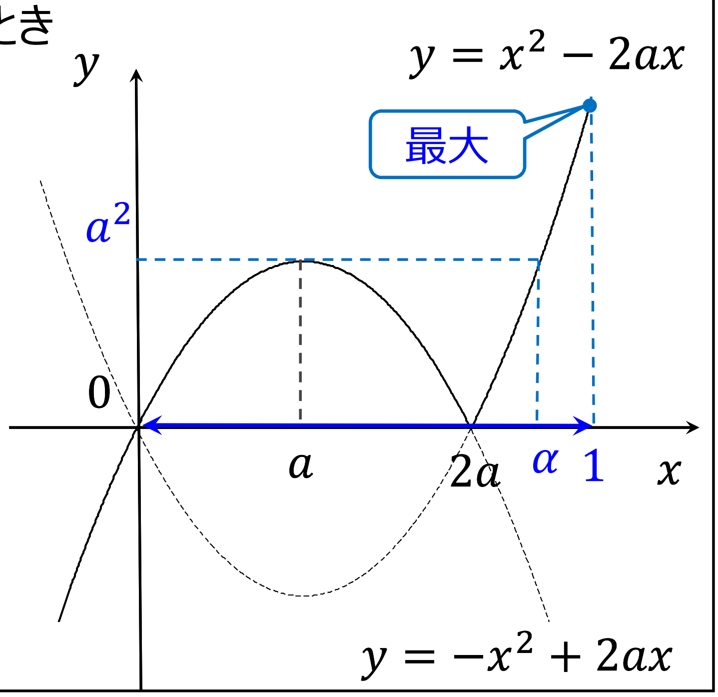
(iv) $\alpha = (\sqrt{2}+1)a < 1$ のとき

⇩

$0 < a < \sqrt{2} - 1$ のとき

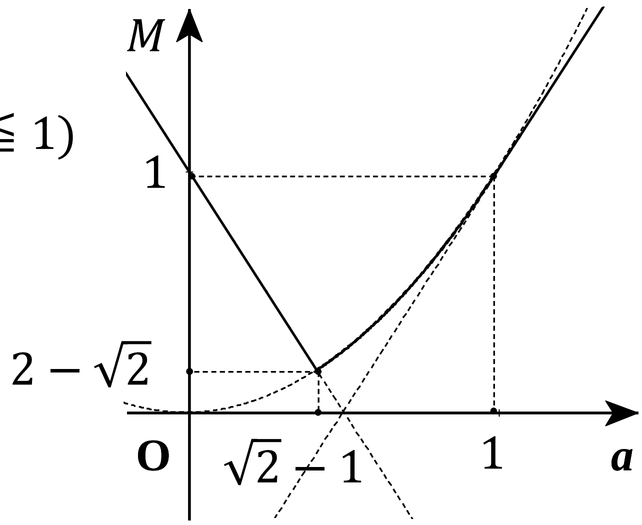
$x = 1$ のとき最大値

$M = f(1) = 1 - 2a$



以上をまとめると,

$$M = \begin{cases} 1 - 2a & (a < \sqrt{2} - 1) \\ a^2 & (\sqrt{2} - 1 \leqq a \leqq 1) \\ 2a - 1 & (a > 1) \end{cases}$$



3　x に関する方程式

$$(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$$

が 4 個の異なる実数解をもつような点 (a ， b) の存在する範囲を図示せよ.

$x^2+ax+b=0$ 　　　　　　　　$x^2+bx+a=0$

⇩　　　　　　　　　　　　⇩

異なる2つの実数解　　　　　異なる2つの実数解

⇩　　　　　　　　　　　　⇩

$D_1=a^2-4b>0$ 　　　　　　$D_2=b^2-4a>0$

共通の解をもつ場合を除く

$x^2+ax+b=0$ と $x^2+bx+a=0$ が共通解 α をもつとき,

$$\begin{cases}\alpha^2+a\alpha+b=0 \cdots ① \\ \alpha^2+b\alpha+a=0 \cdots ②\end{cases}$$

ダメな場合

⇩　①－②で因数分解

$$(a-b)(\alpha-1)=0$$

⇩

$a=b$ または $\alpha=1$

⇩

$$a+b+1=0$$

これらは，除く場合

$$\begin{cases} a^2 - 4b > 0 \\ b^2 - 4a > 0 \\ a \neq b \\ a + b + 1 \neq 0 \end{cases}$$

求める領域は右図
斜線部分
ただし，境界と
$b = -a$，$b = -a - 1$
上は除く