◎　同じものを含む順列　（基本問題【3】）

$n$ 個のもののうち，同じものがそれぞれ $p$ 個，$q$ 個，$r$ 個，……あるとき，これら $n$ 個のものの順列の総数は

$$\frac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!\cdots\cdots} \quad (\text{ただし，} p+q+r+\cdots=n)$$

◎　円順列　　　　　　　　　　（基本問題【5】）

異なる $n$ 個のものの円順列の総数は

$$(n-1)!$$

◎　じゅず順列

異なる $n$ 個のものの円順列のうち，裏返して一致するものは同じものと見るじゅず順列の総数は

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

◎　和集合の要素の個数

$$
\begin{aligned}
n(A\cup B\cup C)=&\,n(A)+n(B)+n(C)\\
&-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\
&+n(A\cap B\cap C)
\end{aligned}
$$

【1】

(1)　赤色の玉 6 個，青色の玉 2 個の，同じものを含む順列であるから，

$$\frac{9!}{6!2!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{2}$$

$$=252\quad(\text{通り})$$

(2)　透明な玉を固定すると，残りの玉の並べ方は

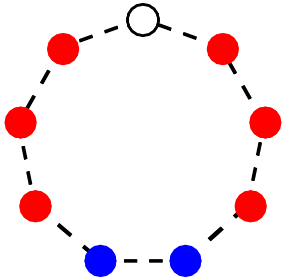
同じものを含む順列であるから

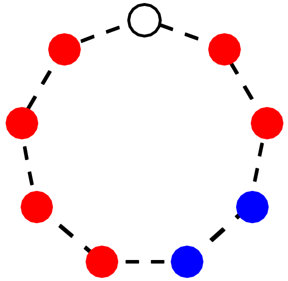
$$\frac{(9-1)!}{6!2!}=\frac{8\cdot 7}{2}$$

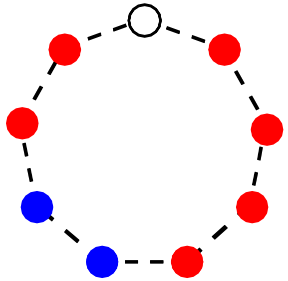
$$=28\quad(\text{通り})$$

(3)　透明な玉が上に来るように首飾りを置く。

(2) の円順列には左右対称なものと，左右非対称なものがある。

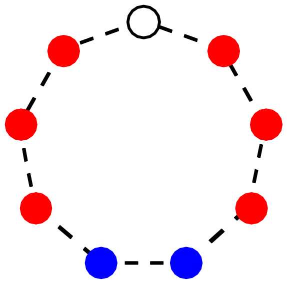




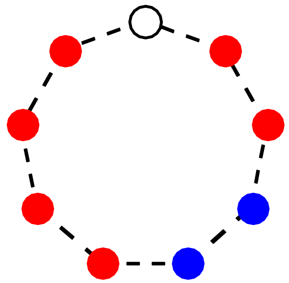


計 28　通り

これらをひっくり返すと，



$\dfrac{4!}{3!}=4$ (通り)



$x$ (通り)

よって，$4+2x=28$ より，$x=12$

ゆえに，$12+4=16$　(通り)

【2】

(1)　7 個の球のうち A に入る 2 個の選び方は，$_7C_2$

残りの 5 個の球のうち B に入る 2 個を選び方は，$_5C_2$

残りの 3 個の球のうち C に入る 2 個を選び方は，$_3C_2$

積の法則により，求める方法は,

$$_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_2 = 630$$

(2)　空のケースができてもよい場合の球の入れ方は

$$3^7 = 2187 \quad (\text{通り})$$

A，B，C のケースが空であるような入れ方の集合を,

順に $\boldsymbol{E}_A$，$\boldsymbol{E}_B$，$\boldsymbol{E}_C$ とする。

A のケースが空の場合,

B，C のケースに 7 個の球を入れればよいから，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{E}_A) = 2^7$

B，C のケースが空の場合も同様

A と B のケースが空の場合，

C のケースに 7 個すべて入れることになるから，$n(E_A \cap E_B)=1$

B と C，C と A のケースが空の場合も同様

A と B と C のケースが空となることはないので，$n(E_A \cap E_B \cap E_C)=0$

以上より空のケースがあるような入れ方は，

$$\begin{aligned} n(E_A \cup E_B \cup E_C) &= 2^7 \times 3 - 1 \times 3 + 0 \\ &= 381 \end{aligned}$$

したがって，求める分け方は，

$2187 - 381 = 1806$　（通り）

(3)　7 個の球を 3 つのグループに分けた後，A，B，C のケースに入れれば，

(2) の分け方となるから，求める方法を $x$ 通りとすると，

$$x \cdot 3! = 1806$$

$$x = \frac{1806}{3!} = 301 \quad \text{(通り)}$$

【3】

3 個の整数を $a$，$b$，$c$（$a<b<c$）とする。

1から $n$ までを小さい順に並べると，

1，2，⋯，$a$，⋯，$b$，⋯，$c$，⋯，$(n-1)$，$n$ となる。

条件を満たすためには，$a$ と $b$，$b$ と $c$ の間に最低 2 つの数があればよい。

すなわち，1，⋯，$a$，$a+1$，$a+2$ ⋯，$b$，$b+1$，$b+2$ ⋯，$c$，⋯，$n$

$a$，$a+1$，$a+2$ のまとまりを $A$，$b$，$b+1$，$b+2$ のまとまりを $B$ とすると，1，⋯，$A$，⋯，$B$，⋯，$c$，⋯，$n$

この $(n-4)$ 個スペースに対して，$A$，$B$，$c$ の入り方を求めればよい。

よって，${}_{n-4}\mathrm{C}_3=\dfrac{1}{6}(n-4)(n-5)(n-6)$

別解　基本問題【14】(1)，(2) の別解を参照

3 個の整数を $a$，$b$，$c$（$a<b<c$）とすると，$a$，$b$，$c$ の満たす条件は

$1\leqq a$，$a+3\leqq b$，$b+3\leqq c$，$c\leqq n$　……①である。

したがって，①を満たす整数の組 $(a, b, c)$ の個数が求めるものである。

整数 $M$，$N$ について $M \leqq N \Leftrightarrow M-1 < N$ であるから，

①は $1 \leqq a$，$a+2 < b$，$b+2 < c$，$c \leqq n$

$a = x$，$b-2 = y$，$c-4 = z$ とおくと，

上の条件は，$1 \leqq x < y < z \leqq n-4$ ……②と書き換えられる。

②を満たす整数の組 $(x, y, z)$ は1から $n-4$ までの整数から異なる3つの数字を選んで，それを小さい順に並べることで得られるから，

${}_{n-4}\mathrm{C}_3$ 通りある。