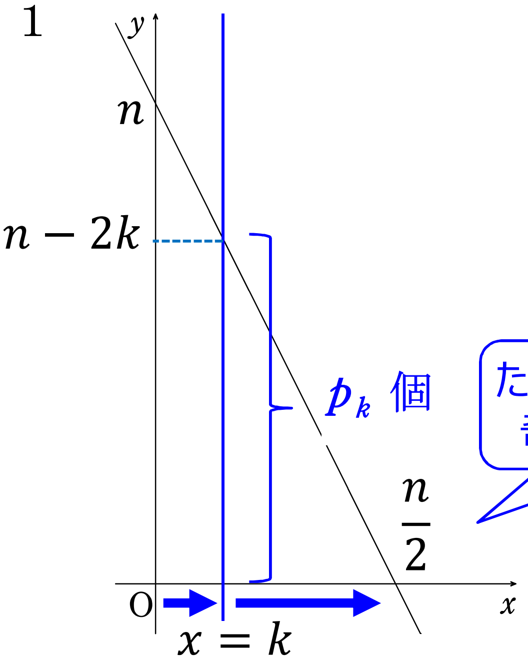
新城門プロジェクト
数列

1



基本的な考え方

$x=0$ から $x=\frac{n}{2}$

までの格子点の数の和を求める

$$p_k = n - 2k + 1$$

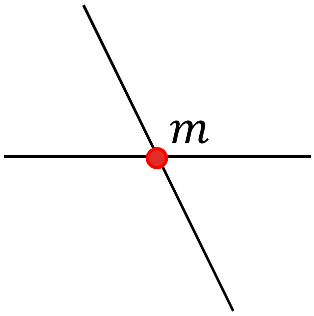
ただし，n が偶数か奇数で場合分け

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} p_k$$

$n=2m$ のとき

$$\sum_{\boxed{k=0}}^{m}(n-2k+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n}a_k=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k$$



$$=n+1+\sum_{k=1}^{m}(n-2k+1)$$

$$=n+1+(n+1)\sum_{k=1}^{m}1-2\sum_{k=1}^{m}k$$

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc \quad (c\text{ は定数}) \qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=n+1+(n+1)m-m(m+1)$$

$$=n+1+(n+1)m-m(m+1)$$

$$m=\frac{n}{2}$$

$$=\frac{1}{4}n^2+n+1=\frac{(n+2)^2}{4}$$

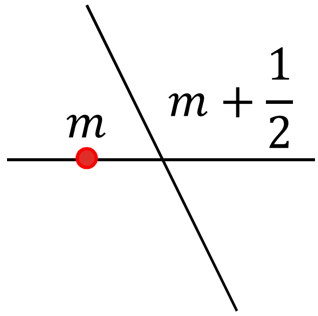
$n = 2m + 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{m}(n-2k+1)$$

$$= n+1+(n+1)m - m(m+1)$$

⇩ $m = \dfrac{n-1}{2}$

$$= \frac{(n+1)(n+3)}{4}$$



2　試しに

$$(x+1)(x+2)(x+3)$$

$$= x^3 + (1+2+3)x^2 + (1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 1)x+6$$

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ も同様に計算すると，

$(1+2+3+4)x^3$

$(1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4+2\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 4)x^2$

⇩

x^{n-1} の係数：各カッコの定数の和

x^{n-2} の係数：各カッコの定数から 2 つを選んだ積の総和

(1)　$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots\cdots(x+n)$ の x^{n-1} の係数は

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2)　$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots\cdots(x+n)$ の x^{n-2} の係数は

どうやって $1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)n$ を求めるか？

次の公式をヒントに何かできないか

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$(1+2+3+\cdots\cdots+n)(1+2+3+\cdots\cdots n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

$$=2\{1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots\cdots+(n-1)n\}+(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$\Downarrow$$

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2-\sum_{k=1}^{n} k^2\right\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(3n+2)$$

3　和　$\Longrightarrow$　一般項

$$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$$

$$S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

$$\Downarrow \qquad S_n-S_{n-1}$$

$$a_n=S_n-S_{n-1} \qquad n\geqq 2$$

$n=1$ のときは？

$$a_1=S_1$$

$a_{n+1}=pa_n+q$ 型の漸化式の解き方

$a_{n+1}-\alpha=p(a_{n+1}-\alpha)$ の形に変形できないか？

$$a_{n+1}=pa_n+\alpha-pa$$

$$q=\alpha-p\alpha$$

$$\alpha=p\alpha+q$$

α は，　$x=px+q$ の解

$\boxed{b_{n+1}=pb_n}$ 等比数列の漸化式

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_{n+1}-\alpha)$$

（ただし，　α は，　$x=px+q$ の解）

(1)　$S_n=-a_n+3n$ …①

$\Downarrow$ $n=1$ を代入

$\boxed{a_1=S_1}$

$S_1=a_1=-a_1+3$　　$a_1=\dfrac{3}{2}$

(2)　$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$S_n = -a_n + 3n \quad \cdots ①$$

$$S_{n-1} = -a_{n-1} + 3(n-1) \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$S_n - S_{n-1} = a_n = -a_n + a_{n-1} + 3$$

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{3}{2} \quad \cdots ③$$

(3)　③より，　$n \geqq 2$ のとき，

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}$$

$$\alpha = 3$$

$$a_n - 3 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 3)$$

数列 $\{a_n - 3\}$ は初項 $-\dfrac{3}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列になるので

$$a_n - 3 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = 3\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$　これは，$a_1 = \dfrac{3}{2}$ も満たす．

数学的帰納法とは

(i) $n=1$ で成り立つ

(ii) $n=k$ で成り立つ

$\Downarrow$

$n=k+1$ で成り立つ

(ii) (ii) (ii)

$k=1$ ○ $\Rightarrow$ $k=2$ ○ $\Rightarrow$ $k=3$ ○ $\Rightarrow$ ……

$11^{n+1}+12^{2n-1}$ は 19 で割り切れる … (*)

(i)　$n=1$ のとき，

$$11^{n+1}+12^{2n-1}=11^2+12=133=19\times7$$

となり，19 で割り切れる

(ii)　考え方

$n=k$ のとき　　$11^{k+1}+12^{2k-1}=19m$　（ m は整数）

これを証明する

11 の累乗だけにする

$12^{2k-1}=19m-11^{k+1}$

（12 の累乗を消去）

$n=k+1$ のとき

$11^{k+2}+12^{2k+1}=19m'$　（ m' は整数）

(ii)　$n=k$ のとき，(*) が成り立つと仮定すると，

$11^{k+1}+12^{2k-1}=19m$　（ m は整数）　$\cdots$ ①

とおくことができ，

$12^{2k-1}=19m-11^{k+1}$ $\cdots$ ②

$n=k+1$ のとき，②より，

$$\begin{aligned}11^{k+2}+12^{2k+1}&=11^{k+2}+12^2\times 12^{2k-1}\\&=11\cdot 11^{k+1}+12^2(19m-11^{k+1})\\&=19(144m-7\cdot 11^{k+1})\end{aligned}$$