KS プロジェクト（2017～2020）

新城門プロジェクト
国公立医学部入試数学講座

Vol②

新モンゴル小中高一貫学校＆海城中学高等学校　共同講座

はじめに

昨年１１月に開講した「新城門プロジェクト」も第２クールに入ります。

このクールでは，理系数学の最重要項目である「微分積分」の準備も兼ねて，

“三角比・三角関数”，“指数関数・対数関数”，“数列”

といったトピックを，また第３クールで登場する本格的な図形問題へのトライアルとして

“平面ベクトル”

をそれぞれ学習します。これらのトピックは，

“得意でなければ，国公立医学部合格は到底望めない”

というべき大変気重要な箇所です。第１クール以上に，添削問題に熱心に取り組むなど，充実した学習が望まれます。

（予定） **⑧～⑩の日程は６月７日の授業時にお知らせする予定です**

回・実施時期	⑥5月10日	⑦6月7日	⑧9月	⑨10月	⑩10月下旬
テーマ	三角比・三角関数 指数・対数関数	数列	図形 と方程式	平面ベクトル	新城門 数学模試②
担当者	川崎真澄	村山雅之	平山裕之	中村哲也	
イベント	医学部受験 作戦講話①	医療ディス カッション	医療ディス カッション	医学部受験 作戦講話	模試解説

このクールから**添削問題の提出を授業後１週間以内とします**ので以下のような学習サイクルとなります：

例えば６回目の「三角比・三角関数」についてなら，

１．基本問題を解く

☞２．練習問題を予習する

☞３．講座に出席する

☞４．講座の復習する

☞５．添削問題に取り組み，担当の先生に提出する

☞６．添削問題の復習をする

ともあれ，第１クール以上に実り豊かな楽しい講座にしましょう。

※なお，海城の生徒は（このプロジェクトが実施されない）７月もしくは８月に補講を実施します。詳細は６月７日の講座でお知らせします。

新城門プロジェクト（第 6 回）　**☆第 5 回は新城門数学模試①**

テーマ：三角比・三角関数・指数関数・対数関数

§1. 基本問題（自習用）

【1】

(1)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ として，方程式 $6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0$ を解け.

(2)　$-\pi \leqq \theta < \pi$ として，方程式 $1 + \cos\theta + \cos 2\theta = 0$ を解け.

【2】

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，次の不等式を解け.

(1)　$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$　　　　　(2)　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) > -\dfrac{1}{2}$

【3】

$f(x) = \sin x - \cos 2x$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値，最小値を求めよ.

【4】

$0 \leqq x < 2\pi$ として，不等式 $\sin 3x \geqq \sin x$ を解け.

【5】

不等式 $\cos 2x + 2a\sin x - a - 2 < 0$ が任意の実数 x について成り立つような a の値の範囲を求めよ.

【6】

直線 $x - 3y + 6 = 0$ とのなす角が $45°$ で，点 $(9,\ 3)$ を通る直線の方程式を求めよ.

【7】

関数 $y = \sin^2 x + 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x$ の最大値と最小値を求めよ.

【8】

半径1の円に内接する正五角形ABCDEを考える．また，$\alpha = \dfrac{2}{5}\pi$ とおく.

(1)　$\sin 3\alpha + \sin 2\alpha = 0$ が成り立つことを示せ.

(2)　$\cos\alpha$ の値を求めよ.

(3)　線分ACの長さを求めよ.

【9】

次の方程式を解け．

(1)　$8^x-4^x-2^{x+1}+2=0$

(2)　$\log_2(x+1)+\log_4(4-x)=2$

【10】

$x \geqq 10$，$y \geqq 10$，$xy=10^3$のとき，次の各式の最大値と最小値を求めよ．またそのときのx，yの値を求めよ．

(1)　$(\log_{10}x)(\log_{10}y)$

(2)　$\log_x y$

【11】

$a>0$，$a \neq 1$とする．このとき，xの不等式

$$\log_a(x+2) \geqq \log_{a^2}(3x+16)$$

を解け．

【12】

$a^2<b<a<1$であるとき，

$$\log_a b,\quad \log_b a,\quad \log_a \frac{a}{b},\quad \log_b \frac{b}{a},\quad \frac{1}{2}$$

を大小の順に並べよ．

【13】

0でない4つの数a，b，c，dに対し，

$$\left(\frac{3}{4}\right)^a=\left(\frac{5}{3}\right)^b=\left(\frac{6}{5}\right)^c=\left(\frac{3}{2}\right)^d$$

が成り立つとき，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{d}$$

となることを示せ．

【14】

5^{105}は何桁の整数であり，その最高位の数字は何か求めよ．また，$\left(\frac{1}{5}\right)^{105}$は小数第何位に初めて0でない数が現れるか求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$とする．

§2. 練習用問題

【1】

$b=\frac{1}{4}(a^2-2a-3), \mathrm{c}=\frac{1}{4}(a^2+3)$の関係があるとき，

（１）a, b, cが三角形の三辺の長さとなるための条件を求めよ．

（２）最大角を求めよ．

【2】

$\mathrm{y}=\frac{3sin\theta-cos\theta}{2+sin\theta+cos\theta}$　の最大値，最小値を求めよ．

【3】

$x>0$とする．座標平面上の3点A(0，1)，B(0，2)，P(x，x)をとる．xの値が変化するとき，∠APBの最大値を求めよ．

【4】

領域$log_x y \leq log_y x$を図示せよ．

§3. 添削用問題

【1】

$f(\theta)=\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$とする.

(1)　$x=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$とするとき，$f(\theta)$を$x$で表せ.

(2)　$f(\theta)$の最大値を求めよ．また，そのときのθを求めよ.

【2】

すべての実数xに対して, 不等式　$2^{2x+2}+2^{x}a+1-a>0$　が成り立つような実数aの範囲を求めよ.

＜基本問題の解答と解説＞

【1】

(1)　$\sin^2 x=1-\cos^2 x$ より $-6\cos^2 x+5\cos x+4=0$　$(3\cos x-4)(2\cos x+1)=0$

$-1\leqq\cos x\leqq 1$ に注意して，$\cos x=-\dfrac{1}{2}$　　$0\leqq x<2\pi$ より，$x=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$

(2)　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ より $2\cos^2\theta+\cos\theta=0$　　$\cos\theta(2\cos\theta+1)=0$

$\cos\theta=0$，$-\dfrac{1}{2}$　　$-\pi\leqq\theta<\pi$ より，$\theta=\pm\dfrac{1}{2}\pi$，$\pm\dfrac{2}{3}\pi$

【2】

(1)　$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{5}{3}\pi$

(2)　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$ で，$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)>-\dfrac{1}{2}$ を満たす $\theta-\dfrac{\pi}{3}$ は，$-\dfrac{\pi}{6}<\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{6}\pi$

よって，$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

【３】

$f(x)=\sin x-\cos 2x=\sin x-(1-2\sin^2 x)=2\sin^2 x+\sin x-1$

$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq\pi$ より $0\leqq t\leqq 1$ であり，$f(x)=2t^2+t-1=2\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$

よって，$f(x)$ は，$t=1$ のとき最大値2をとり，$t=0$ のとき最小値 -1 をとる．

【４】

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ であるから，不等式は $3\sin x-4\sin^3 x\geqq\sin x$ となる．式変形して，

$2\sin x-4\sin^3 x\geqq 0$　　$\sin x(1-2\sin^2 x)\geqq 0$

これより，$\sin x\leqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$0\leqq\sin x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，$0\leqq x<2\pi$ において，解は，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi\leqq x\leqq\dfrac{7}{4}\pi$

【5】

　$\sin x = t$とおく．$-1 \leqq t \leqq 1$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$であるから，$\cos 2x + 2a\sin x - a - 2 = 1 - 2t^2 + 2at - a - 2$である．

この右辺を$f(t)$とおく．$-1 \leqq t \leqq 1$において，つねに$f(t) < 0$となる条件,

すなわち，$-1 \leqq t \leqq 1$における$f(t)$の最大値が負となる条件を求めればよい.

$f(t) = -2t^2 + 2at - a - 1 = -2\left(t - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}a^2 - a - 1$

$\dfrac{a}{2} < -1$，すなわち$a < -2$のとき$-1 \leqq t \leqq 1$における$f(t)$の最大値は，$f(-1) = -3a - 3$

であるから，$a < -2$のとき，最大値は正であり，不適.

$-1 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 1$．すなわち$-2 \leqq a \leqq 2$のとき$-1 \leqq t \leqq 1$における$f(t)$の最大値は

$f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{2}a^2 - a - 1$

よって，条件は，$a^2 - 2a - 2 < 0$となり，これを解いて，$1 - \sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{3}$

$-2 \leqq a \leqq 2$とあわせて，$1 - \sqrt{3} < a \leqq 2$

$\dfrac{a}{2} > 1$，すなわち$a > 2$のとき$-1 \leqq t \leqq 1$における$f(t)$の最大値は，$f(1) = a - 3$

よって，条件は，$a - 3 < 0$となり，これを解いて，$a < 3$　$a > 2$とあわせて，$2 < a < 3$

以上まとめて，求めるaの値の範囲は，$1 - \sqrt{3} < a < 3$

【6】

直線$x - 3y + 6 = 0$は傾き$\dfrac{1}{3}$の直線で，この直線がx軸となす角をαとすると，$\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$

求める直線がx軸となす角は，$\alpha \pm 45^\circ$　であるから，その傾きは,

$$\tan(\alpha \pm 45^\circ) = \frac{\tan\alpha \pm \tan 45^\circ}{1 \mu \tan\alpha \tan 45^\circ}$$ (複号同順)　で,

$\dfrac{\frac{1}{3} + 1}{1 - \frac{1}{3}} = 2$　$\dfrac{\frac{1}{3} - 1}{1 + \frac{1}{3}} = -\dfrac{1}{2}$ ゆえ，求める直線の方程式は，$y = 2(x - 9) + 3$，$y = -\dfrac{1}{2}(x - 9) + 3$

すなわち$y = 2x - 15$，$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{15}{2}$

【７】

$2\sin x\cos x = \sin 2x$　　　$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$　　であるから，

$y = 4\sin x\cos x + 3 + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 3 + 2\sin 2x + 2\cos 2x$

さらに合成して，$y = 3 + 2\sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

ここで，$2x + \dfrac{\pi}{4}$ は任意の値をとるので，$-1 \leqq \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ であり，

最大値 $3 + 2\sqrt{2}$，最小値 $3 - 2\sqrt{2}$

【８】

(1)　$\alpha = \dfrac{2}{5}\pi$ より，$3\alpha = 2\pi - 2\alpha$ であるから，$\sin 3\alpha + \sin 2\alpha = -\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = 0$

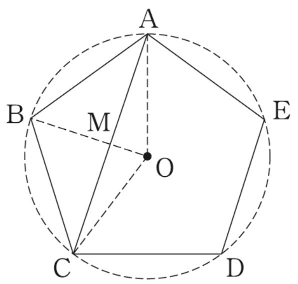
(2)　$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$　　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ であるから，(1)より，

$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\sin\alpha \neq 0$ に注意して，$3 - 4(1 - \cos^2\alpha) + 2\cos\alpha = 0$　　$4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0$

α は鋭角より，$\cos\alpha > 0$ であるから，$\cos\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

(3)



図のように，円の中心をOとし，線分ACの中点をMとする．$\angle AOM = \dfrac{2}{5}\pi = \alpha$，$OM \perp AC$

であるから，$AM = AO\sin\alpha = \sin\alpha$

よって，$AC = 2\sin\alpha = 2\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \dfrac{1}{2}\sqrt{16 - (-1 + \sqrt{5})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

【9】

(1)　$8^x-4^x-2^{x+1}+2=0 \Leftrightarrow (2^3)^x-(2^2)^x-2^x\cdot 2^1+2=0 \Leftrightarrow (2^x)^3-(2^x)^2-2\cdot 2^x+2=0$

$\Leftrightarrow t^3-t^2-2t+2=0$　(ただし$t=2^x$)$\Leftrightarrow t^2(t-1)-2(t-1)=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2-2)=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow t=1,\ \sqrt{2}$　($t=2^x>0$より)$\Leftrightarrow 2^x=2^0,\ 2^{\frac{1}{2}}$

よって$x=0,\ \dfrac{1}{2}$

(2)　$\log_2(x+1)+\log_4(4-x)=2$　……(＊)

真数条件より$x+1>0$かつ$4-x>0$

つまり$-1<x<4$　……①

①のもとで(＊)は

$$\frac{\log_4(x+1)}{\log_4 2}+\log_4(4-x)=\log_4 16 \Leftrightarrow 2\log_4(x+1)+\log_4(4-x)=\log_4 16$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x+1)^2(4-x)=\log_4 16 \Leftrightarrow (x+1)^2(4-x)=16 \Leftrightarrow x^3-2x^2-7x+12=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+x-4)=0 \Leftrightarrow x=3,\ \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

①と合わせて$x=3,\ \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

【10】

$x \geqq 10$，$y \geqq 10$，$xy=10^3$より，$\begin{cases}\log_{10}x \geqq \log_{10}10 \\ \log_{10}y \geqq \log_{10}10 \\ \log_{10}xy \geqq \log_{10}10^3\end{cases}$ つまり，$\begin{cases}\log_{10}x \geqq 1 \\ \log_{10}y \geqq 1 \\ \log_{10}x+\log_{10}y=3\end{cases}$

だから，$X=\log_{10}x$，$Y=\log_{10}y$とおくと，$\begin{cases}X \geqq 1 \\ Y \geqq 1 \\ X+Y=3\end{cases}$ である．

(1)　$(\log_{10}x)(\log_{10}y)=XY=X(3-X)=-\left(X-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

Xの範囲は，$X \geqq 1$かつ$3-X \geqq 1$より$1 \leqq X \leqq 2$であるから，$-\left(X-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$は$X=\dfrac{3}{2}$のとき最大値$\dfrac{9}{4}$をとり，$X=1$，2のとき最小値2をとる．

以上より，$(\log_{10}x)(\log_{10}y)$は，

$$\begin{cases}(x,y)=(10\sqrt{10},10\sqrt{10})\text{のとき最大値 }\dfrac{9}{4} \\ (x,y)=(10,10^2),(10^2,10)\text{のとき最小値 }2\end{cases}$$

(2)　$\log_x y=\dfrac{\log_{10} y}{\log_{10} x}=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{3-X}{X}=\dfrac{3}{X}-1$

Xの範囲は，$1\leqq X\leqq 2$であるから，$\dfrac{3}{X}-1$は$X=1$のとき最大値2をとり，$X=2$のとき最小値$\dfrac{1}{2}$をとる．

以上より，$\log_x y$は，$\begin{cases}(x,y)=(10,10^2)\text{のとき最大値 } 2\\(x,y)=(10^2,10)\text{のとき最小値 } \dfrac{1}{2}\end{cases}$

【11】

$\log_a(x+2)\geqq\log_{a^2}(3x+16)$

真数条件より，$x+2>0$かつ$3x+16>0$　つまり，$x>-2$　……①

①のもとで，

$\log_a(x+2)\geqq\log_{a^2}(3x+16)\Leftrightarrow\log_a(x+2)\geqq\dfrac{\log_a(3x+16)}{\log_a a^2}\Leftrightarrow 2\log_a(x+2)\geqq\log_a(3x+16)$

$\Leftrightarrow\log_a(x+2)^2\geqq\log_a(3x+16)$　……(＊)

(ｉ)　$a>1$のとき，(＊)$\Leftrightarrow(x+2)^2\geqq 3x+16\Leftrightarrow x^2+x-12\geqq 0\Leftrightarrow x\leqq -4,\ x\geqq 3$

①との共通部分をとって，$x\geqq 3$

(ⅱ)　$0<a<1$のとき，(＊)$\Leftrightarrow(x+2)^2\leqq 3x+16\Leftrightarrow x^2+x-12\leqq 0\Leftrightarrow -4\leqq x\leqq 3$

①との共通部分をとって，$-2<x\leqq 3$

以上(ｉ)と(ⅱ)より，$\begin{cases}x\geqq 3 & (a>1\text{のとき})\\-2<x\leqq 3 & (0<a<1\text{のとき})\end{cases}$

【12】

$a^2<b<a<1$より，$\log_a a^2>\log_a b>\log_a a>\log_a 1$

つまり，$(0<)1<\log_a b<2$　だから，$x=\log_a b$とおくと，$1<x<2$

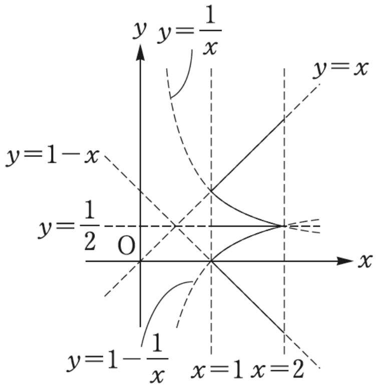
また，$\log_b a=\dfrac{\log_a a}{\log_a b}=\dfrac{1}{x}$

$$\log_a\frac{a}{b}=\log_a a-\log_a b=1-x$$

$$\log_b\frac{b}{a}=\log_b b-\log_b a=1-\frac{1}{x}$$

だから，$\log_a b$，$\log_b a$，$\log_a\dfrac{a}{b}$，$\log_b\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{1}{2}$の大小は，$1<x<2$の範囲での

x，$\dfrac{1}{x}$，$1-x$，$1-\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{2}$の大小を調べればよい．それぞれのグラフは次のようになる．



$1<x<2$の範囲で$1-x<1-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{x}<x$　だから，$\log_a \dfrac{a}{b}<\log_b \dfrac{b}{a}<\dfrac{1}{2}<\log_b a<\log_a b$

【13】

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^a=\left(\dfrac{5}{3}\right)^b=\left(\dfrac{6}{5}\right)^c=\left(\dfrac{3}{2}\right)^d=10^k$ とおくと，常用対数をとって，

$$\log_{10}\left(\frac{3}{4}\right)^a=k,\quad \log_{10}\left(\frac{5}{3}\right)^b=k,\quad \log_{10}\left(\frac{6}{5}\right)^c=k,\quad \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^d=k$$

つまり，$a=\dfrac{k}{\log_{10}\frac{3}{4}}$，$b=\dfrac{k}{\log_{10}\frac{5}{3}}$，$c=\dfrac{k}{\log_{10}\frac{6}{5}}$，$d=\dfrac{k}{\log_{10}\frac{3}{2}}$

だから，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\log_{10}\frac{3}{4}}{k}+\frac{\log_{10}\frac{5}{3}}{k}+\frac{\log_{10}\frac{6}{5}}{k}$$

$$=\frac{\log_{10}3-\log_{10}4+\log_{10}5-\log_{10}3+\log_{10}6-\log_{10}5}{k}$$

$$=\frac{\log_{10}\frac{6}{4}}{k}=\frac{\log_{10}\frac{3}{2}}{k}$$

また，$\dfrac{1}{d}=\dfrac{\log_{10}\frac{3}{2}}{k}$ であるから，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{d}$ が成り立つ．

【14】

$A=5^{105}$とおくと，

$\log_{10}A=105\log_{10}5=105\log_{10}\dfrac{10}{2}=105(\log_{10}10-\log_{10}2)=105(1-0.3010)=73.395$より，

$A=10^{73.395}$

だから，$10^{73}<A<10^{74}$を満たす．よって，Aは74桁の整数である．

また，$A=10^{0.395}\cdot 10^{73}$より$A$の最高位の数字は$10^{0.395}$の1の位の数字である．

$\log_{10}2<0.395<\log_{10}3$より，$2<10^{0.395}<3$であるから，$A$の最高位の数字は2である．

次に，$B=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{105}$とおくと，

$\log_{10}B=105\log_{10}\dfrac{1}{5}=105(-\log_{10}5)=-73.395$より，

$B=10^{-73.395}$だから，$10^{-74}<B<10^{-73}$を満たす．

よって，Bは小数第74位に初めて0でない数が現れる．

新城門プロジェクト（第7回）

テーマ：数列

§1. 基本問題（自習用）

【1】

等差数列$\{a_n\}$において，その第3項が8，第7項が20である．このとき，初項は$\boxed{}$，公差は$\boxed{}$であり，一般項をa_nとすると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{20} a_k=\boxed{}$である．

【2】

第2項が12，第5項が768となる公比が実数の等比数列$\{a_n\}$の一般項は$\boxed{}$，初項から第n項までの和は$\boxed{}$である．

【3】

ある等差数列の第n項をa_nとするとき，

$$a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=365,\quad a_{15}+a_{17}+a_{19}=-6$$

が成立している．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　この等差数列の初項と公差を求めよ．

(2)　この等差数列の初項から第n項までの和をS_nとするとき，S_nの最大値を求めよ．

【4】

4つの数x，$2x-5$，y，zがこの順で等差数列になっている．次の問いに答えよ．

(1)　yおよびzをそれぞれxを用いて表せ．

(2)　xを0でない数とする．x，y，zがこの順で等比数列になっているとき，xの値をすべて求めよ．

【5】

奇数の数列1，3，5，…を，第n群がn個の奇数を含むように分ける．

$$\{1\},\ \{3,\ 5\},\ \{7,\ 9,\ 11\},\ \{13,\ 15,\ 17,\ 19\},\ \cdots$$

(1)　第10群の最初の数を求めよ．

(2)　第8群の数の和を求めよ．

(3)　999は第何群の第何番目の数であるか．

【6】

数列1，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{3^2}$，$\dfrac{4}{3^3}$，…の第n項までの和を求めよ．

【7】

次の和を計算せよ．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

【8】

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+3)$ を計算せよ．

【9】

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$を求めよ．

【10】

$1\cdot N+2\cdot(N-1)+3\cdot(N-2)+\cdots+N\cdot 1$を求めよ．

【11】

$\{a_n\}$，$\{b_n\}$はともに初項が6，第2項が3，第3項が2の数列である．

(1)　$c_n=a_{n+1}-a_n$　($n=1$，2，3，$\cdots$)とおく．数列$\{c_n\}$が等差数列であるとき，a_nを求めよ．

(2)　$d_n=b_{n+1}-b_n$　($n=1$，2，3，$\cdots$)とおく．数列$\{d_n\}$が等比数列であるとき，b_nを求めよ．

【12】

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが

$$S_n=n^3+6n^2+11n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

のとき，

(1)　a_nをnの式で表せ．

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ をnの式で表せ．

【13】

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n-2n$　($n=1$，2，3，$\cdots$)で定義される数列の一般項a_nを求めよ．

【14】

$a_1=2$，$a_{n+1}=4a_n+3$　($n=1$，2，3，$\cdots$)により定められた数列の一般項を求めよ．

【15】

$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定義される数列$\{a_n\}$について，

(1)　数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$の一般項をnで表せ．

(2)　数列$\{a_n\}$の一般項をnで表せ．

【16】

$a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定義される数列$\{a_n\}$について，

(1)　a_2，a_3，a_4を求めよ．

(2)　a_nを表すnの式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ．

【17】

$$\text{等式}\qquad 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}=(n-1)\cdot2^n+1$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

【18】

すべての自然数nについて，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\frac{2n}{n+1}$$

§2. 練習用問題

【1】

自然数nに対して，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq n$を満たす整数x，yの組(x, y)の個数をa_nとして，数列$\{a_n\}$をつくる．この数列の一般項a_nを求めよ．

【2】

$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)$の展開式について，次の問いに答えよ．ただし，$n$は2以上の整数とする．

(1)　x^{n-1}の係数を求めよ．

(2)　x^{n-2}の係数を求めよ．

【3】

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが，

$$S_n = -a_n + 3n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

と表されている．

(1)　初項a_1を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$のとき，a_nとa_{n-1}との間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　一般項a_nを求めよ．

【4】

nが自然数のとき，$11^{n+1}+12^{2n-1}$は19で割り切れることを示せ．

§3. 添削用問題

【1】

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nは次の条件を満たすとする．

$$S_1=1,\quad S_{n+1}-3S_n=2^{n+1}-1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　数列$\{a_n\}$の満たす漸化式を求めよ．

(2)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$とおくとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ．

(3)　a_{100}を4で割ったときの余りを求めよ．

【2】

正の整数からなる数列$\{a_n\}$が$n=1$，2，3，…に対して，

$$n\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)<2,\quad 2+\frac{1}{a_{n+1}}<(n+1)\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

を満たし，かつ$a_2=2$とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_1を求めよ．

(2)　a_3を求めよ．

(3)　一般項a_nを推定し，それが正しいことを証明せよ．

＜基本問題の解答と解説＞

【1】

求める等差数列$\{a_n\}$の初項をa，公差をdとすると，$a_n=a+(n-1)d$　であるから，

$a_3=8$，$a_7=20$より，

$$\begin{cases} a_3=a+2d=8 & \Lambda\Lambda ① \\ a_7=a+6d=20 & \Lambda\Lambda ② \end{cases}$$

①，②を連立して解くと，

$$a=2,\quad d=3$$

である．よって，数列$\{a_n\}$の初項は2，公差は3である．

さらにこのとき，$a_n=3n-1$であるから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}a_k=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=\frac{20(2+59)}{2}=610$

【2】

求める等比数列$\{a_n\}$の一般項を，$a_n=ar^{n-1}$とおくと，$a_2=12$，$a_5=768$より

$$\begin{cases} a_2=ar=12 \\ a_5=ar^4=768 \end{cases}$$

であり，これより$\dfrac{ar^4}{ar}=\dfrac{768}{12}$　　$r^3=64$　　rは実数であるから，$r=4$

このとき，$a=3$である．

よって，等比数列$\{a_n\}$の一般項は，$a_n=3\cdot 4^{n-1}$　である．

さらにこのとき，等比数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとおくと，

$$S_n=\frac{3(4^n-1)}{4-1}=4^n-1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

【3】

(1)　求める等差数列$\{a_n\}$の初項をa，公差をdとすると，$a_n=a+(n-1)d$であるから，

$$a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=365$$

$$5a+55d=365\qquad a+11d=73\quad \cdots\cdots ①$$

$$a_{15}+a_{17}+a_{19}=-6\qquad 3a+48d=-6\qquad a+16d=-2\quad \cdots\cdots ②$$

①，②を連立して解くと，

$$a=238,\quad d=-15$$

である．よって，数列$\{a_n\}$の初項は238，公差は-15である．

(2)　(1)より，$a_n=238+(n-1)\cdot(-15)=-15n+253$であり，

$$\begin{cases} 1 \leqq n \leqq 16 \text{のとき，} & a_n > 0 \\ \quad 17 \leqq n \text{のとき，} & a_n < 0 \end{cases}$$

により，$S_1<S_2<\cdots\cdots<S_{16}>S_{17}>S_{18}>\cdots$であることがわかる．

したがって，S_nは$n=16$のとき，最大値をとる．

ここで，$S_{16}=\dfrac{16(a_1+a_{16})}{2}=\dfrac{16(238+13)}{2}=2008$であるから，求める$S_n$の最大値は2008

【4】

(1)　x，$2x-5$，yがこの順で等差数列になっているので，$x+y=2(2x-5)$が成り立つ．

これより，$y=3x-10$　……①

同様に，$2x-5$，y，zもこの順で等差数列になっているので，

$(2x-5)+z=2y$　　　$z=-2x+2y+5$　　が成り立つ．これに①を代入すると，

$z=-2x+2(3x-10)+5=4x-15$　……②

(2)　x，y，zがこの順で等比数列になっているので，$xz=y^2$　……③が成り立つ．

これに①，②を代入すると，$x(4x-15)=(3x-10)^2$　　　$(x-4)(x-5)=0$　　　$x=4$，5

【5】

奇数の数列1，3，5，…の一般項をa_nとすると，$a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$である．

(1)　$(1+2+3+\Lambda\Lambda+9)+1=\dfrac{9\cdot 10}{2}+1=46$ であるから，第10群の最初の項は数列$\{a_n\}$の第46項である．よって，第10群の最初の数は，$a_{46}=2\cdot 46-1=91$

(2)　$(1+2+3+\Lambda\Lambda+7)+1=\dfrac{7\cdot 8}{2}+1=29$ $1+2+3\Lambda\Lambda+8=\dfrac{8\cdot 9}{2}=36$

であるから，第8群の数の和は，初項a_{29}，末項a_{36}，項数8の等差数列の和である．

よって，$\dfrac{8(a_{29}+a_{36})}{2}=\dfrac{8(57+71)}{2}=512$

(3)　$2n-1=999$とすると，$n=500$であるから，999は数列$\{a_n\}$の第500項であることがわかる．

ここで，$1+2+3+\Lambda\Lambda+31=\dfrac{31\cdot 32}{2}=496$ であるから，a_{496}は第31群の最後である．

よって，999は第32群の第4番目の数である．

【10】

数列，1，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{3^2}$，$\dfrac{4}{3^3}$，…の第n項までの和をS_nとおくと，

$S_n = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \dfrac{4}{3^3} + \Lambda\Lambda + \dfrac{n}{3^{n-1}}$ であり，$S_n - \dfrac{1}{3}S_n$ を次のように計算すると，

$$
\begin{array}{rrl}
 & S_n = & 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \dfrac{4}{3^3} + \cdots\cdots + \dfrac{n}{3^{n-1}} \\
-) & \dfrac{1}{3}S_n = & \phantom{1+{}} \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \cdots\cdots + \dfrac{n-1}{3^{n-1}} + \dfrac{n}{3^n} \\
\hline
 & \dfrac{2}{3}S_n = & 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{3^{n-1}} - \dfrac{n}{3^n}
\end{array}
$$

$$= \frac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{3}} - \frac{n}{3^n} = \frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - \frac{n}{3^n}$$

となる．よって，$S_n = \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{3}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ $(n = 1，2，3，\cdots)$

【11】

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} = -2\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$$

$$= -2\{(\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \Lambda\Lambda + (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})\} = -2(1 - \sqrt{n+1}) = 2\sqrt{n+1} - 2$$

【12】

$$\sum_{k=1}^{n} (k^2 + 2k + 3) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + 3\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) + 6(n+1) + 18\} = \frac{1}{6}n(2n^2 + 9n + 25)$$

【13】

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots\cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{(2k-1)^2 - (2k)^2\} = \sum_{k=1}^{n} (-4k + 1) = -4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= -4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = -n(2n+1)$$

【14】

$1\cdot N+2\cdot(N-1)+3\cdot(N-2)+\cdots\cdots+N\cdot 1$

$$=\sum_{k=1}^{N}k\cdot(N+1-k)=(N+1)\sum_{k=1}^{N}k-\sum_{k=1}^{N}k^2$$

$$=(N+1)\cdot\frac{N(N+1)}{2}-\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}N(N+1)\{3(N+1)-(2N+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}N(N+1)(N+2)$$

【15】

$a_1=b_1=6$，$a_2=b_2=3$，$a_3=b_3=2$

(1)　$c_n=a_{n+1}-a_n$より，$c_1=a_2-a_1=3-6=-3$，$c_2=a_3-a_2=2-3=-1$であり，

数列$\{c_n\}$は等差数列なので，$c_n=-3+(n-1)\cdot 2=2n-5$

よって，$n\geqq 2$のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=6+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-5)=6+\frac{(n-1)\{(-3)+(2n-7)\}}{2}=n^2-6n+11$$

これは，$n=1$のときも成り立つ．

したがって，$a_n=n^2-6n+11$　($n=1$，2，3，…)

(2)　$d_n=b_{n+1}-b_n$より，$d_1=b_2-b_1=3-6=-3$，$d_2=b_3-b_2=2-3=-1$

であり，数列$\{d_n\}$は等比数列なので，$d_n=(-3)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって，$n\geqq 2$のとき，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}d_k=6+\sum_{k=1}^{n-1}(-3)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=6+\frac{(-3)\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$$

これは，$n=1$のときも成り立つ．したがって，$b_n=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$　($n=1$，2，3，…)

【16】

(1)　$n \geqq 2$のとき,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^3+6n^2+11n) - \{(n-1)^3+6(n-1)^2+11(n-1)\}$$

$$= (n^3+6n^2+11n) - (n^3+3n^2+2n-6)$$

$$= 3n^2+9n+6$$

ここで，$a_1 = S_1 = 18$であるから，$n=1$のときも成り立つ.

よって，$a_n = 3n^2+9n+6$　($n=1$，2，3，…)

(2)　(1)より,

$$a_k = 3k^2+9k+6 = 3(k+1)(k+2)$$

であるから,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3(k+1)(k+2)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n}{6(n+2)}$$

新城門プロジェクト（第 8 回）
テーマ：図形と方程式

§1. 基本問題（自習用）

【1】
$a>0$とする．2直線$ax+(1-a)y=1$と$(2+a)x-y=2$について，これらの2直線が平行であるときのaの値，直交しているときのaの値をそれぞれ求めよ．

【2】
点$(2,\ 1)$を通り，x軸とy軸の両方に接する円の方程式を求めよ．

【3】
円C：$x^2+y^2+2x+2y=0$の中心をPとする．Pの座標は$\boxed{}$であり，Pと
直線l：$x-2y-2=0$との距離は$\boxed{}$である．lがCによって切り取られる弦の長さは$\boxed{}$である．

【4】
xy平面上で点A$(2,\ 1)$と円C：$(x+1)^2+y^2=4$が与えられているとする．また，点Aを通り傾きがmの直線をlとする．
(1)　直線lが円Cに接するとき，mの値を求めよ．
(2)　円Cと直線lが異なる2点B，Cで交わり，線分BCの長さが2であるとき，mの値を求めよ．

【5】
xy平面上の2定点A$(-4,\ 0)$，B$(0,\ 3)$と円$x^2+y^2-4x-2y+4=0$上の動点Pについて，次の問いに答えよ．
(1)　A，Bを通る直線の方程式を求めよ．
(2)　円の中心の座標と半径を求めよ．
(3)　△ABPの面積の最大値を求めよ．

【6】
x，yの方程式$kx^2-(k+1)x-2(k-1)y+2k-5=0$　……①について，
(1)　①が直線を表すkとそのときの方程式を求めよ．
(2)　①が放物線を表し，直線$y=2$に接するようなkの値を求めよ．
(3)　①のグラフは実数kのどんな値に対しても定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

【7】

(1)　円$x^2+y^2=4$と直線$x+\sqrt{3}y-2=0$の交点の座標を求めよ.

(2)　2つの不等式$x^2+y^2\leqq4$,　$x+\sqrt{3}y-2\geqq0$を同時に満足する領域の面積を求めよ.

【8】

平面上の2点A(2,　1),B(−4,　−2)に対してAP：BP＝1：2をみたす点Pの軌跡を求めよ.

【9】

(1)　xy平面において,連立不等式$x^2+y^2-4x\leqq0$,　$x^2+y^2+2y\geqq0$の表す領域を図示せよ.

(2)　直線$x+y=k$が(1)の領域と共有点をもつための,kに関する条件を求めよ.

【10】

2次関数$y=x^2+(2k-10)x-4k+16$ ($k\geqq0$)のグラフについて,次の問に答えよ.

(1)　頂点の座標をkを用いて表せ.

(2)　kが変化するとき,頂点の軌跡を求めよ.

【11】

円C：$(x-1)^2+(y-1)^2=2^2$と2点A(5,　1),B(3,　4) がある.点Pが円C上を動くとき,△ABPの重心Gの軌跡を求めよ.

§2. 練習用問題

【1】

円Oと円O’の方程式をそれぞれ$x^2+y^2-2y=0$，$x^2+y^2-4x-4y+4=0$とする．傾きが0でない直線lが円OとO’にそれぞれ点P，P’で接するときlの方程式とP，P’の座標を求めよ．

【2】

xy平面上の原点をOとし，半円$x^2+y^2=9$，$y \geqq 0$をC_1とおく．半円C_1の周上に2点P，Qをとり，弦PQを軸として，弧PQを折り返し，点R$(\sqrt{3},0)$でx軸に接するようにする．次の問いに答えよ．

(1)　折り返した円弧を円周の一部にもつ円をC_2とする．円C_2の方程式を求めよ．

(2)　3点P，O，Qを通る円をC_3とする．円C_3の中心の座標および半径を求めよ．

(3)　円C_2の周上に点Aを, 円C_3の周上に点Bをとるとき, 線分ABの長さの最大値を求めよ．

【3】

xy平面上の放物線A：$y=x^2$，B：$y=-(x-a)^2+b$は異なる2点P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$　$(x_1>x_2)$で交わるとする．

(1)　$x_1-x_2=2$が成り立つとき，bをaで表せ．

(2)　$x_1-x_2=2$を満たしながらa，bが変化するとき，直線PQの通過する領域を求め，図示せよ．

【4】

2つの直線

$$l：(k+1)x+(1-k)y+k-1=0,\quad m：kx+y+1=0$$

がある．kがすべての実数値をとるとき，lとmの交点の軌跡を求めよ．

§3. 添削用問題

【1】

x軸の正の部分を動く点P$(t,\ 0)$　$(t>0)$と2点A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 3)$がある．

(1)　3点A，B，Pを通る円の中心の座標を求めよ．

(2)　2点A，Bを通り，x軸の正の部分に接する円の方程式を求めよ．

(3)　$\angle$APBを最大にする点Pの座標を求めよ．

【2】

座標平面上において，放物線C: $y=x^2$と直線l: $y=mx-2m+3$が，相異なる2点P$(\alpha,\ \alpha^2)$，Q$(\beta,\ \beta^2)$で交わっている．ただし，$\alpha<\beta$とする．

(1)　実数mがとり得る値の範囲を求めよ．また，$\alpha+\beta$および$\alpha\beta$をmの式で表せ．

(2)　実数mが(1)の範囲のすべての値をとって変化するとき，線分PQの中点Sが描く図形を求め，図示せよ．

＜基本問題の解答と解説＞

【1】

与えられた2直線が，平行となる条件は，$a\cdot(-1)-(1-a)(2+a)=0$

$a>0$より，求めるaの値は$a=\sqrt{2}$

また，与えられた2直線が，直交する条件は，$a(2+a)+(1-a)\cdot(-1)=0$

$a>0$より，求めるaの値は$a=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$

【2】

求める円は，第1象限の点を通り，x軸とy軸の両方に接するから，円の中心は第1象限にある．よって，円の半径を$r(>0)$とおくと，前述のことより中心は$(r,\ r)$とおけるから，求める円の方程式は，$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$と表せる．

これが点$(2,\ 1)$を通るから，$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$　$(r-1)(r-5)=0$　$r=1,\ 5$

よって，求める円の方程式は，$(x-1)^2+(y-1)^2=1$および，$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

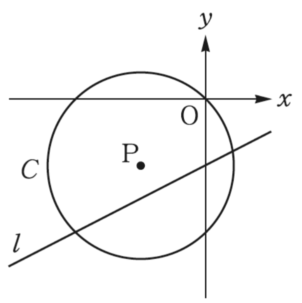
【3】

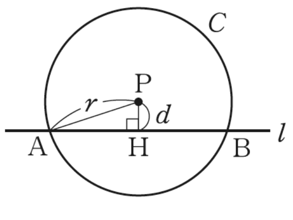
円Cの方程式は，$(x+1)^2+(y+1)^2=2$と変形できるから，円Cの中心P，半径rについて，

$\mathrm{P}(-1,\ -1)$，$r=\sqrt{2}$ である．

よって，Pから直線lまでの距離をdとすると，点と直線の距離の公式より，

$$d=\frac{|-1-2\cdot(-1)-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$





$d<r$よりCとlは2交点をもつ．これらをA，Bとする．また，線分ABの中点をHとする．HはPからlに下ろした垂線の足でもある．

lがCによって切り取られる弦は線分ABであり，その長さをLとすると，三平方の定理より，

$$L=2\mathrm{AH}=2\sqrt{r^2-d^2}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

【4】

円Cの中心をM，半径をrとすると，M$(-1,\ 0)$　　$r=2$

また，直線lの方程式は，$y-1=m(x-2)$

すなわち，$mx-y-(2m-1)=0$

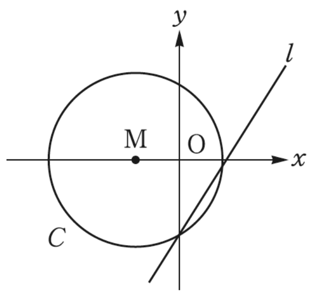
であるから，Mからlまでの距離をdとすると，$d=\dfrac{|-m-0-(2m-1)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$

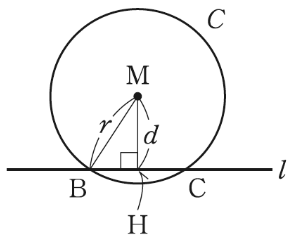
(1)　lがCに接する条件は，$d=r$すなわち$\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=2$　　$|3m-1|=2\sqrt{m^2+1}$

$(3m-1)^2=4(m^2+1)$　　$5m^2-6m-3=0$

よって，求めるmの値は，$m=\dfrac{3\pm 2\sqrt{6}}{5}$

(2)　線分BCの中点をHとすると，HはMからlに下ろした垂線の足でもある．





$\mathrm{BH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=1$であることと，三平方の定理より，$d=\sqrt{r^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{3}$

よって，$\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{3}$　　$|3m-1|=\sqrt{3}\sqrt{m^2+1}$　　$(3m-1)^2=3(m^2+1)$

$6m^2-6m-2=0$　　よって，求めるmの値は，　$m=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{6}$

【5】

(1)　直線ABの傾きは$\dfrac{3-0}{0-(-4)}=\dfrac{3}{4}$であるから，直線ABの方程式は，$y=\dfrac{3}{4}x+3$

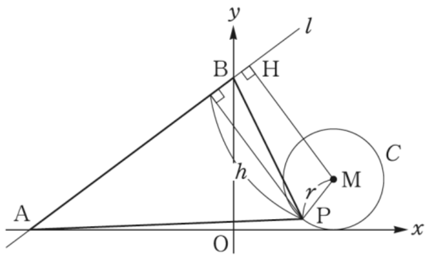
すなわち，$3x-4y+12=0$

(2)　与えられた円の方程式は，$(x-2)^2+(y-1)^2=1$と変形できるから，この円の中心をM，半径をrとおくと，M$(2,\ 1)$　$r=1$

(3)　線分ABを底辺と見たときの，三角形ABPの高さをhとする．また，Mから直線ABに下ろした垂線の足をHとする．$\mathrm{AB}=\sqrt{(0+4)^2+(3-0)^2}=5$（一定）

であるから，三角形ABPの面積が最大となるのは，高さhが最大のときであり，これは，H，M，Pがこの順に一直線上に並ぶときである．

$$\mathrm{MH}=\frac{|3\cdot 2-4\cdot 1+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{14}{5}$$



であるから，hの最大値は，$\mathrm{MH}+r=\dfrac{14}{5}+1=\dfrac{19}{5}$

であり，三角形ABPの面積の最大値は，

$\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{19}{5}=\dfrac{19}{2}$ である．

【6】

(1)　①が直線を表すのは，2次の項kx^2の係数kが0のときであり，このとき①は，

$-x+2y-5=0$すなわち$x-2y+5=0$

よって，求めるkの値と直線の方程式は，$k=0$，$x-2y+5=0$

(2)　①が放物線を表し，直線$y=2$に接するのは，2次の項kx^2の係数kが0でなく，さらに，①に$y=2$を代入して得られるxの2次方程式が重解をもつときである．

①に$y=2$を代入すると，$kx^2-(k+1)x-2k-1=0$

この2次方程式の判別式をDとおくと，

$$D=(k+1)^2-4k(-2k-1)=9k^2+6k+1=(3k+1)^2$$

よって，求めるkの値は，$k\neq 0$かつ$D=0$より，$k=-\dfrac{1}{3}$

(3)　①のグラフが点$(p,\ q)$を通る条件は，

$kp^2-(k+1)p-2(k-1)q+2k-5=0$　……②

が成り立つことである．

②をkについて整理すると，$(p^2-p-2q+2)k+(-p+2q-5)=0$　……②’

①のグラフがkの値によらず点$(p,\ q)$を通る条件は，②がkの値によらず成り立つこと，すなわち，②’がkの恒等式となることである．

②’がkの恒等式となる条件は，

$$\begin{cases} p^2-p-2q+2=0 & \Lambda\Lambda\ ③ \\ -p+2q-5=0 & \Lambda\Lambda\ ④ \end{cases}$$

③＋④より，$p^2-2p-3=0$　$(p+1)(p-3)=0$

よって，$(p,\ q)=(-1,\ 2)$，$(3,\ 4)$　したがって，①のグラフはkの値によらず2定点$(-1,\ 2)$，$(3,\ 4)$を通る．

【7】

(1)　円と直線の方程式を連立する．

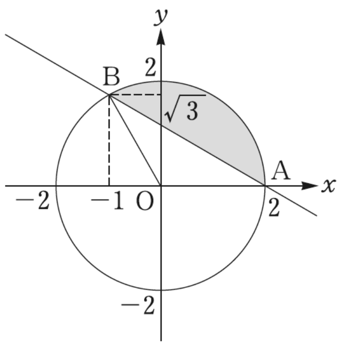
$$\begin{cases} x^2+y^2=4 & \Lambda\Lambda\ \text{①} \\ x+\sqrt{3}y-2=0 & \Lambda\Lambda\ \text{②} \end{cases}$$

②より，$x=2-\sqrt{3}y$　……②’

②’を①に代入すると，$(2-\sqrt{3}y)^2+y^2=4$　$4y^2-4\sqrt{3}y=0$　$4y(y-\sqrt{3})=0$ より $y=0,\ \sqrt{3}$

これと②’より，交点の座標は，(2，0)，$(-1,\sqrt{3})$

(2)　与えられた不等式の表す領域は，次の図の灰色の部分(境界線を含む)のようになる．



(1)で求めた交点(2，0)，$(-1,\sqrt{3})$ を順にA，Bとおくと，Aはx軸の正の部分にあり，Bの座標は$\left(2\cos\dfrac{2}{3}\pi, 2\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$と表せることから，Oを原点として$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2}{3}\pi$である．

したがって，求める面積をSとおくと，

$$S=(\text{扇形OAB})-\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

【8】

Pの座標を$(X,\ Y)$とおくと，AP：BP＝1：2より，2AP＝BPすなわち$2^2\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

$4\{(X-2)^2+(Y-1)^2\}=\{X-(-4)\}^2+\{Y-(-2)\}^2$

$3(X^2-8X+Y^2-4Y)=0$　$(X-4)^2+(Y-2)^2=20$

よって，求める軌跡は，円　$(x-4)^2+(y-2)^2=20$　である．

【9】

(1)　境界線

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x=0 & \Lambda\Lambda ① \\ x^2+y^2+2y=0 & \Lambda\Lambda ② \end{cases}$$

について，①は，$(x-2)^2+y^2=4$

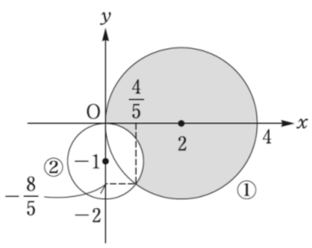
と表せるから，①の表す図形は中心が$(2,\ 0)$，半径が2の円である．

また，②は，$x^2+(y+1)^2=1$と表せるから，②の表す図形は中心が$(0,\ -1)$，半径が1の円である．さらに，①−②より，$-4x-2y=0$すなわち$y=-2x$　……③

③を②に代入すると，$5x^2-4x=0$より$x=0,\ \dfrac{4}{5}$

これと③より，①，②の交点は，$(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{8}{5}\right)$である．

与えられた不等式の表す領域は，円①の内部または周と円②の外部または周の共通部分であるから，下図の灰色の部分(境界を含む)．



(2)　円①の中心を点M，円①，②の交点のうち，原点と異なる方を点Aと呼ぶことにする．

直線$x+y=k$　……④は，傾きが−1でy切片がkの直線である．

直線④が円①に接するとき，Mから④までの距離が，①の半径に等しいから，

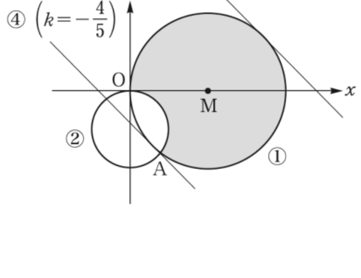
$$\frac{|2+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2 \qquad |k-2|=2\sqrt{2} \qquad k=2\pm2\sqrt{2}$$

よって図より，kのとり得る最大値は$k=2\pm2\sqrt{2}$

また，MAの傾きは$\dfrac{-\dfrac{8}{5}-0}{\dfrac{4}{5}-2}=\dfrac{4}{3}$であるから，Aにおける①の接線の傾きは$-\dfrac{3}{4}$であり，④の傾きより大きいから，$k$が最小値をとるのは④がAを通るときとなる．

よって，kのとり得る最小値は

$$k=x+y=\frac{4}{5}+\left(-\frac{8}{5}\right)=-\frac{4}{5}$$



以上より，kの満たすべき条件は，

$$-\frac{4}{5}\leqq k\leqq 2+2\sqrt{2}$$

【10】

(1)　与えられた2次関数は，

$$y=\{x+(k-5)\}^2-(k-5)^2-4k+16=\{x-(5-k)\}^2+(-k^2+6k-9)$$

と表せるから，求める頂点の座標は，$(5-k,\ -k^2+6k-9)$

(2)　頂点を$(X,\ Y)$とおくと，X，Y，kの満たすべき条件は，

$$\begin{cases} X=5-k & \Lambda\Lambda ① \\ Y=-k^2+6k-9 & \Lambda\Lambda ② \\ k \geqq 0 & \Lambda\Lambda ③ \end{cases}$$

求める軌跡，すなわち，X，Yの関係式は，①，②，③を満たすkが存在するようなX，Yの条件であり，これは，①から得られる$k=5-X$を②，③に代入して得られる

$$Y=-(5-X)^2+6(5-X)-9,\ 5-X\geqq 0$$

である．この式を整理して，$Y=-(X-2)^2$，$X\leqq 5$

よって，求める軌跡は，放物線$y=-(x-2)^2$の$x\leqq 5$の部分

【11】

円Cと直線ABは右図のように共有点をもたないから，点Pが円C上のどこにあってもA，B，Pを3頂点とする三角形が作れる．

P$(s,\ t)$，G$(X,\ Y)$とおくと，PはC上にあるから，

$$(s-1)^2+(t-1)^2=2^2 \quad \cdots\cdots ①$$

また，三角形ABPの重心がGであるから，

$$X=\frac{5+3+s}{3} \text{ かつ } Y=\frac{1+4+t}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

②より，$s=3X-8$かつ$t=3Y-5$

これを①に代入すると，$(3X-8-1)^2+(3Y-5-1)^2=2^2$　$(X-3)^2+(Y-2)^2=\dfrac{4}{9}$

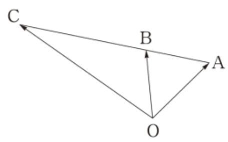
よって，Gの軌跡は，円　$(x-3)^2+(y-2)^2=\dfrac{4}{9}$

新城門プロジェクト（第 9 回）

テーマ：平面ベクトル

§1. 基本問題（自習用）

【1】



図のように，同一直線上にある 3 点 A，B，C は

AB：BC＝1：2を満たしている．$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

【2】

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}$ 平行でない $\vec{b}$ である2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ があって，これらが，

$$s(\vec{a}+3\vec{b})+t(-2\vec{a}+\vec{b})=-5\vec{a}-\vec{b}$$

を満たすとき，s，tの値を求めよ．

【3】

平行四辺形ABCDの辺BCを1：2に内分する点をE，直線AEと対角線BDとの交点をF，直線AEと直線CDとの交点をGとする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とするとき，3つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

【4】

三角形OABにおいて，OA＝3，OB＝4，AB＝2とする．三角形OABの重心をG，内心をIとするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

【5】

AD//BC，BC＝2ADである四角形ABCDがある．点P，Qが，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}，\quad \overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}=\vec{0}$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　ABとPQが平行であることを示せ．

(2)　3点P，Q，Dが一直線上にあることを示せ．

【6】

三角形OABにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，点Cと点Dを $\overrightarrow{OC}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{OD}=3\vec{b}$ によりそれぞれ定める．また，線分ADと線分BCの交点をEとする．

(1)　AE：AD＝t：1　(0＜t＜1)とするとき，$\overrightarrow{OE}$ をt，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　BE：BC＝s：1　(0＜s＜1)とするとき，$\overrightarrow{OE}$ をs，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3)　(1)と(2)を利用することにより，$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

【7】

座標平面上に3点O(0，0)，A(3，2)，B(1，5) がある．

(1)　三角形OABの面積を求めよ．

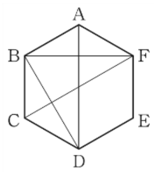
(2)　sとtが条件$s≧0$，$t≧0$，$1≦s+t≦2$を満たすとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で定まる点Pの存在する範囲の面積を求めよ．

【8】

1辺の長さがaの正六角形ABCDEFにおいて，内積

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CF}$

をそれぞれ求めよ．



【9】

3つのベクトル $\vec{a}=(4,-3)$，$\vec{b}=(-5,2)$，および $\vec{c}=(1,3)$ について，$t\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{c}$ が垂直になるようなtの値を求めよ．

【10】

$\vec{a}=(-4,3)$，$\vec{b}=(3,1)$ に対して，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ．また，このとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ とのなす角を求めよ．

【11】

三角形OABにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{7}$ のとき，

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2)　三角形OABの面積を求めよ．

【12】

三角形OABにおいて，OA＝2，OB＝3，AB＝4である．点Oから辺ABに下ろした垂線の足をHとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

【13】

三角形ABCにおいて，AB＝2，AC＝3，∠A＝60°，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする．このとき，

三角形ABCの外心をOとして，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=x\vec{b}+y\vec{c}$ と表したとき，x，yの値を求めよ．

【14】

平面上に $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{3}$ を満たすベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ がある．

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ を満たすベクトル $\vec{p}$ について，$|\vec{p}|$ の最大値と最小値を求めよ．

§2. 練習用問題

【1】

三角形OABにおいて，辺AB上に点Qをとり，直線OQ上に点Pをとる．ただし，点Pは点Qに関して点Oと反対側にあるとする．3つの三角形OAP, OBP, ABPの面積をそれぞれa, b, c とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ およびa，bを用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ およびa，b，cを用いて表せ．

(3)　3辺OA，OB，ABの長さをそれぞれ3，5，6とする．点Pを中心とし，3直線OA，OB，ABに接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

【2】

原点をOとする座標平面上に，点A(2，0)を中心とする半径1の円C_1と，点B(−4，0)を中心とする半径2の円C_2がある．点PはC_1上を，点QはC_2上を，それぞれ独立に，自由に動きまわるとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ とするとき, 点Sが動くことのできる範囲を求め, その概形をかけ.

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ とするとき, 点Rが動くことのできる範囲を求め, その概形をかけ.

【3】

AC＝4ABを満たす三角形ABCにおいて，辺ABを2：1に内分する点をD，辺ACを1：2に内分する点をE，線分BEとCDの交点をFとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2)　∠BAF＝30°のとき，∠BACの大きさを求めよ．

【4】

三角形ABCの外心Oから直線BC，CA，ABに下ろした垂線の足をそれぞれP，Q，Rとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ が成立しているとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の関係式を求めよ．　(2)　∠Aの大きさを求めよ．

§3. 添削用問題

【1】

平行四辺形ABCDにおいて，三角形ABCの内部に点P，三角形ADCの内部に点Qがある．

$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$， $3\overrightarrow{AQ}+4\overrightarrow{DQ}+2\overrightarrow{CQ}=\vec{0}$ が成り立つとき，

(1)　3つの三角形PAB，PBC，PCAの面積比を求めよ．

(2)　平行四辺形ABCDと四角形APCQの面積比を求めよ．

【2】

1辺の長さが2の正三角形ABCの外接円を円Oとする．点Pが円Oの周上を動く．

(1)　円Oの半径を求めよ．

(2)　内積の和 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ を求めよ．

(3)　内積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ の最大値，最小値を求めよ．

＜基本問題の解答と解説＞

【1】

$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$であるから，$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

よって，$\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$

【2】

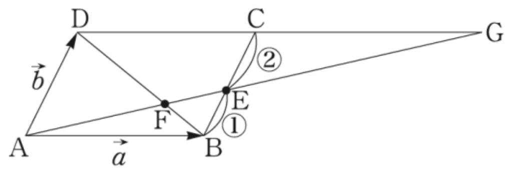
$s(\vec{a}+3\vec{b})+t(-2\vec{a}+\vec{b})=-5\vec{a}-\vec{b}$　　$(s-2t)\vec{a}+(3s+t)\vec{b}=-5\vec{a}-\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}$平行でない$\vec{b}$より，

$$\begin{cases} s-2t=-5 \\ 3s+t=-1 \end{cases}$$

よって，$s=-1$，$t=2$

【3】



$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

△AFD∽△EFBであり，相似比は3：1であるから，AF：FE＝3：1である．

よって，$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\left(\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

△AFB∽△GFDであり，相似比は1：3であるから，AF：FG＝1：3である．

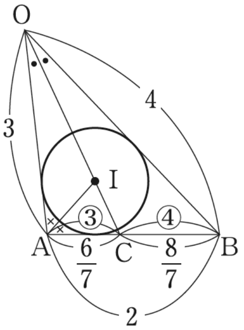
よって，$\overrightarrow{AG}=4\overrightarrow{AF}=4\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)=3\vec{a}+\vec{b}$

【4】

Gは三角形OABの重心なので，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

直線OIと辺ABの交点をCとすると，直線OCは∠AOBの二等分線なので，AC：CB＝3：4

である．さらに，直線AIは∠OABの二等分線なので，



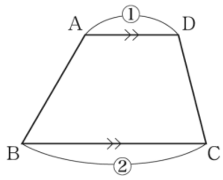
$$OI:IC=AO:AC=3:\frac{6}{7}=7:2$$

である．

よって，$\overrightarrow{OI}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{OC}=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3+4}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

【5】

(1) $\begin{cases}\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0} & \Lambda\Lambda ① \\ \overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}=\vec{0} & \Lambda\Lambda ②\end{cases}$



①より $-\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}\quad\cdots\cdots①'$$

②より $-\overrightarrow{AQ}+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AQ})=\vec{0}$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}\quad\cdots\cdots②'$$

ここで，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$ であるから，②'より

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})}{3}=\frac{-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}\quad\cdots\cdots③$$

ここで，①'，③より $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}-\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\quad\cdots\cdots④$

が得られるので，AB//PQであることが示された．

(2) $\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}{2}-\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}=-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}\quad\cdots\cdots⑤$

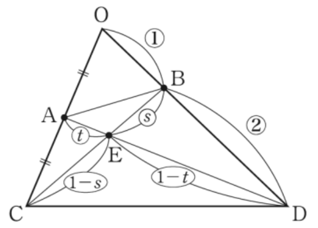
であるから，④，⑤より，$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{PD}$

が得られるので，3点P，Q，Dは一直線上にあることが示された．

【6】

(1)　AE：ED＝t：$(1-t)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{t+(1-t)}=(1-t)\vec{a}+3t\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$



(2)　BE：EC＝s：$(1-s)$より，

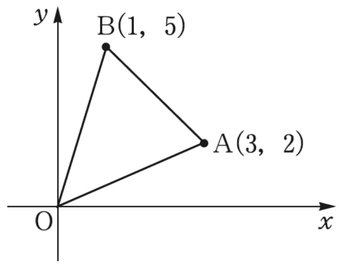
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{s+(1-s)}=2s\vec{a}+(1-s)\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

(3)　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}$平行でない$\vec{b}$であるから，

①，②より，$\begin{cases}1-t=2s\\3t=1-s\end{cases}$

このとき，$s=\dfrac{2}{5}$，$t=\dfrac{1}{5}$であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{4}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}$

【7】



(1) $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}|3\cdot5-2\cdot1|=\dfrac{13}{2}$

(2)　P$(x,\ y)$とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

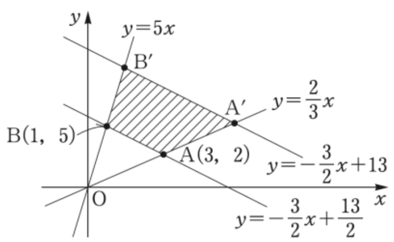
より，$(x,\ y)=s(3,\ 2)+t(1,\ 5)$

$\begin{cases}x=3s+t\\y=2s+5t\end{cases}$であり，これより，$s=\dfrac{5x-y}{13}$，$t=\dfrac{-2x+3y}{13}$が得られる．このとき，

$s\geqq0$，$t\geqq0$，$1\leqq s+t\leqq2$

より，$\begin{cases}\dfrac{5x-y}{13}\geqq0\\\dfrac{-2x+3y}{13}\geqq0\\1\leqq\dfrac{3x+2y}{13}\leqq2\end{cases}$　すなわち，$y\leqq5x$，$y\geqq\dfrac{2}{3}x$　$-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{2}\leqq y\leqq-\dfrac{3}{2}x+13$

であるから，点P$(x,\ y)$の存在する範囲を図示すると，次の斜線部分になる．
ただし，境界線上は含む．



直線 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$ と2直線 $y=\frac{2}{3}x$，$y=5x$との交点をそれぞれA’，B’とすると

△OAB∽△OA’B’であり，相似比は1：2である．よって，

$$\triangle \mathrm{OA'B'}=4\times\triangle \mathrm{OAB}=4\times\frac{13}{2}=26$$

求める点Pの存在する範囲の面積をSとすると，$S=\triangle \mathrm{OA'B'}-\triangle \mathrm{OAB}=26-\frac{13}{2}=\frac{39}{2}$

【8】

AD⊥BFであるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=0$

AD＝2a,　$\mathrm{BD}=\sqrt{3}a$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ のなす角は30°　であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{BD}}|\cos 30^\circ=2a\cdot\sqrt{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3a^2$$

AD＝CF＝2a,　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ のなす角は120°　であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{CF}}|\cos 120^\circ=2a\cdot 2a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2a^2$$

【9】

$t\vec{a}+\vec{b}=t(4,-3)+(-5,2)=(4t-5,-3t+2)$であり，$(t\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{c}$であるから,

$(t\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=0$　$(4t-5,-3t+2)\cdot(1,3)=0(4t-5)\cdot1+(-3t+2)\cdot3=0$　　$t=\frac{1}{5}$

【10】

$\vec{a}+t\vec{b}=(-4,3)+t(3,1)=(3t-4,t+3)$であるから,

$$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(3t-4)^2+(t+3)^2}=\sqrt{10t^2-18t+25}=\sqrt{10\left(t-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{169}{10}}\geqq\frac{13}{\sqrt{10}}$$

等号が成り立つのは，$t=\frac{9}{10}$ のときである．よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$の最小値は$\frac{13}{\sqrt{10}}$ である.

さらにこのとき，$t=\frac{9}{10}$ であるから，$\left(\vec{a}+\frac{9}{10}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\left(-\frac{13}{10},\frac{39}{10}\right)\cdot(3,1)=-\frac{39}{10}+\frac{39}{10}=0$

したがって，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は90°　である.

【11】

(1)　$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{7}$ より，$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=7$　$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=7$

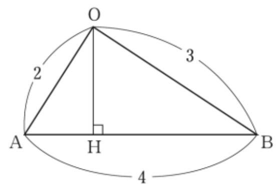
$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ であるから，$3^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot 2^2=7$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{9}{2}$

(2)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{9}{2}$ より，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\cdot 2^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$$

【12】

AH：HB＝t：$(1-t)$（t は実数）



とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

と表せる．さらに，OH⊥ABより，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから，

$$\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0\qquad (t-1)|\vec{a}|^2-(2t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0\quad\cdots\cdots①$$

ここで，AB＝4より，$|\vec{b}-\vec{a}|=4$ なので，$|\vec{b}-\vec{a}|^2=16$　$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=16$

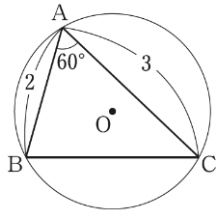
$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ より，$3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=16$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$

であるから，①に代入して，$(t-1)\cdot 2^2-(2t-1)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+t\cdot 3^2=0$　　$t=\dfrac{11}{32}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{21}{32}\vec{a}+\dfrac{11}{32}\vec{b}$

【13】

$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{BO}|$ より，



$$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AO}|^2-2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$$

すなわち，$2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2$

が得られるので，これより，$2(x\vec{b}+y\vec{c})\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2$　$2x|\vec{b}|^2+2y\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|^2$　……①

$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$ より，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2}=3$ であるから，①より，

$4x+3y=2$　……①'

同様に，$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{CO}|$ より，$2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2$ が得られるので，これより

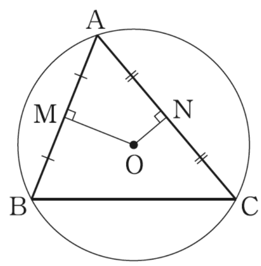
$2x+6y=3$　……②

①'，②より $x=\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{4}{9}$

別解

OからAB，ACに下ろした垂線の足をそれぞれM，Nとすると，外心OはAB，ACの垂直二等分線の交点なので，M，Nはそれぞれ辺AB，ACの中点である．

このことから，MO⊥ABより $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ なので，



$$(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$\left(x\vec{b}+y\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0\quad x|\vec{b}|^2+y\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}|\vec{b}|^2$$

$|\vec{b}|=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ より，$4x+3y=2$　……③

同様に，NO⊥ACより，$2x+6y=3$　……④

③，④より $x=\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{4}{9}$

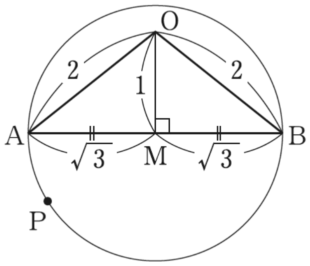
【14】

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ より，$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2-\frac{|\vec{a}+\vec{b}|^2}{4}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|^2}{4}$$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}=\sqrt{3}$$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とすると，PはABの中点Mを中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円周上の点であることがわかる．



これより，

$$(|\vec{p}|\text{の最大値})=\mathrm{OM}+\mathrm{MP}=1+\sqrt{3}$$

$$(|\vec{p}|\text{の最小値})=\mathrm{MP}-\mathrm{OM}=\sqrt{3}-1$$

である．