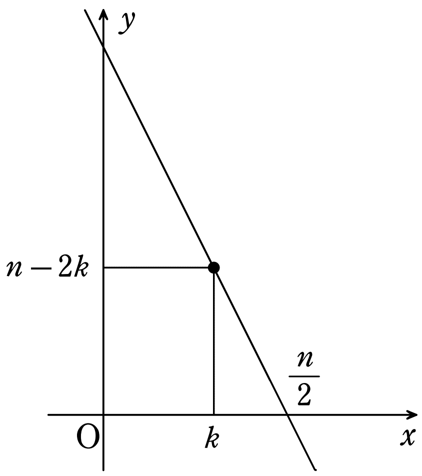
表題

$\boxed{1}$ 自然数 n に対して， $x \geqq 0$ ， $y \geqq 0$ ， $2x+y \leqq n$ を満たす整数の組 (x ， y) の個数を a_n として，数列 $\{a_n\}$ をつくる．この数列の一般項を求めよ．

解説

$x=k$ のとき，格子点の数は $n-2k+1$ となるので，



(ｉ) $n=2m$ (m は整数)のとき，格子点の個数は，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{m}(n-2k+1) \\
&= n+1+\sum_{k=1}^{m}(n-2k+1) \\
&= n+1+(n+1)\sum_{k=1}^{m}1-2\sum_{k=1}^{m}k \\
&= n+1+(n+1)m-m(m+1) \\
&= (n+1)(m+1)-m(m+1) \\
&= (m+1)(n-m+1)
\end{aligned}
$$

$m=\frac{m}{2}$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(n-\frac{n}{2}+1\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+2)^2
\end{aligned}
$$

(ii) $n=2m+1$ のとき， $x=m$ までの和になるので，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{m}(n-2k+1) \\
&= (m+1)(n-m+1)
\end{aligned}
$$

(ｉ)と同じ計算

$m=\frac{n-1}{2}$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(n-\frac{n-1}{2}+1\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)(n+3)
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ $(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ の展開式について，次の問いに答えよ．ただし，n は 2 以上の整数とする．

(1)　x^{n-1} の係数を求めよ．

(2)　x^{n-2} の係数を求めよ．

解説

(1)　x^{n-1} の係数は，

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2)　x^{n-2} の係数を S とおくと，

$$\begin{aligned}&(1+2+3+\cdots\cdots+n)(1+2+3+\cdots\cdots+n)\\&=2\{1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)n\}+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}\\&=\frac{1}{24}n(n+1)\{3(n^2+n)-2(2n+1)\}\\&=\frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2)\\&=\frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(3n+2)\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = -a_n + 3n$$

と表されている.

(1) 初項 a_1 を求めよ.

(2) $n \geqq 2$ のとき, a_n と a_{n-1} との間に成り立つ関係式を求めよ.

(3) 一般項 a_n を求めよ.

解説

(1) $S_n = -a_n + 3n$ …①

①に $n=1$ を代入すると,

$$S_1 = a_1 = -a_1 + 3 \qquad a_1 = \frac{3}{2}$$

(2) ①より, $n \geqq 2$ のとき,

$$S_{n-1} = -a_{n-1} + 3(n-1) \ \cdots ②$$

①, ②より,

$$S_n - S_{n-1} = a_n = -a_n + a_{n-1} + 3$$

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{3}{2} \ \cdots ③$$

(3) ③より, $n \geqq 2$ のとき,

$$a_n - 3 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 3)$$

数列 $\{a_n - 3\}$ は初項 $-\frac{3}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列になるので

$$a_n - 3 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = 3\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

これは, $a_1 = \frac{3}{2}$ も満たす.

$\boxed{4}$ n が自然数のとき，$11^{n+1}+12^{2n-1}$ は 19 で割り切れることを示せ．

(解説)

$11^{n+1}+12^{2n-1}$ は 19 で割り切れる $\cdots$ (*)

(i) $n=1$ のとき，

$$11^{n+1}+12^{2n-1}=11^2+12=133=19\times 7$$

となり，19 で割り切れる

(ii) $n=k$ のとき，(*) が成り立つと仮定すると，

$$11^{k+1}+12^{2k-1}=19m \quad (\ m\ \text{は整数}) \quad \cdots ①$$

とおくことができ，

$$12^{2k-1}=19m-11^{k+1} \cdots ②$$

$n=k+1$ のとき，②より，

$$\begin{aligned} 11^{k+2}+12^{2k+1} &= 11^{k+2}+12^2\cdot 12^{2k-1} \\ &= 11\cdot 11^{k+1}+144(19m-11^{k+1}) \\ &= 19\cdot 144m-19\cdot 7\cdot 11^{k+1} \\ &= 19(144m-7\cdot 11^{k+1}) \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも(*)は成り立つ．

以上より，すべての自然数 n に対して(*)は成り立つ．