新城門プロジェクト　第8回
図形と方程式

練習問題 1.

円 O と円 O$'$ の方程式をそれぞれ
$x^2+y^2-2y=0,\ x^2+y^2-4x-4y+4=0$ とする。
傾きが 0 でない直線 ℓ が円 O と O$'$ にそれぞれ点 P, P$'$ で接するとき，ℓ の方程式と P, P$'$ の座標を求めよ。

練習問題 1. 解答

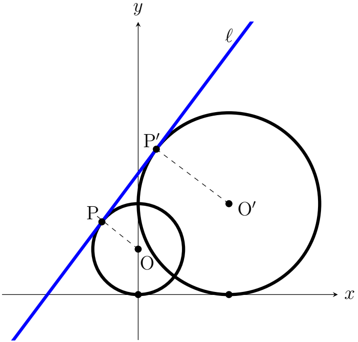
それぞれの円の中心と半径は

円 O : $x^2 + y^2 - 2y = 0$

$\longrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1^2 \longrightarrow$ 中心 $(0, 1)$, 半径 1

円 O′ : $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

$\longrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \longrightarrow$ 中心 $(2, 2)$, 半径 2



直線 ℓ の方程式を $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ とする。
円の中心から接線 ℓ までの距離は半径に等しい。

点と直線の距離

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ との距離 d は

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{|m \cdot 0 - 1 + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \\ \dfrac{|m \cdot 2 - 2 + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \end{cases}$$

練習問題 1. 解答　その 1

$$\begin{cases} |n-1| = \sqrt{m^2+1} \\ |2m+n-2| = 2\sqrt{m^2+1} \end{cases}$$

$2|n-1| = |2m+n-2|$

図より，$m > 0$, $n > 2$ であるから

$2(n-1) = 2m+n-2$

$n = 2m$

$|2m-1| = \sqrt{m^2+1}$

$(2m-1)^2 = m^2+1$

$3m^2 - 4m = 0$

$m = 0,\ \dfrac{4}{3}$ であるが，$m \neq 0$ なので $m = \dfrac{4}{3}$

したがって，直線 ℓ の方程式は

$y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{8}{3}$

練習問題 1. 解答　その 1

$y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ と円 O, O' の接点 P, P' の座標は，

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1^2 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$x^2 + (\frac{4}{3}x + \frac{5}{3})^2 = 1$$

$$25x^2 + 40x + 16 = 0$$

$x = -\frac{4}{5}$ より

$$\mathrm{P}(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$$

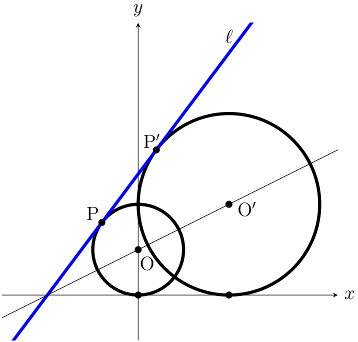
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + (\frac{4}{3}x + \frac{2}{3})^2 = 4$$

$$25x^2 - 20x + 4 = 0$$

$x = \frac{2}{5}$ より

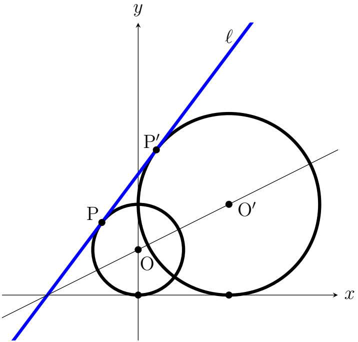
$$\mathrm{P}'(\frac{2}{5}, \frac{16}{5})$$



2 円 O, O' の中心を通る直線と，2 本の共通接線は 1 点で交わる。

2 円の中心 $(0, 1), (2, 2)$ を通る直線は $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

x 軸との交点は $(-2, 0)$ なので，直線 ℓ は $(-2, 0)$ を通る。



円の接線

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

P$(x_1,\ y_1)$ とする。
P を通る円 O の接線は
$x_1x+(y_1-1)(y-1)=1^2$
と表せる。
これが $(-2,0)$ を通るので，
$-2x_1-y_1+1=1$
$y_1=-2x_1$
P は円 O 上の点なので，
$x_1^2+(-2x_1-1)^2=1^2$
$5x_1^2+4x_1=0$
$x=0,\ -\dfrac{4}{5}$
したがって，P$(-\dfrac{4}{5},\ \dfrac{8}{5})$

P$'(x_2,\ y_2)$ とする。
P$'$ を通る円 O$'$ 接線は
$(x_2-2)(x-2)+(y_2-2)(y-2)=2^2$
と表せる。
これが $(-2,0)$ を通るので，
$-4x_2+8-2y_2+4=4$
$y_2=-2x_2+4$
P$'$ は円 O$'$ 上の点なので，
$(x_2-2)^2+(-2x_2+4-2)^2=2^2$
$5x_2^2-12x_2+4=0$
$x=2,\ \dfrac{2}{5}$
したがって，P$'(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{16}{5})$

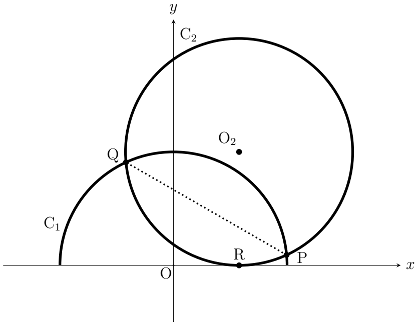
練習問題 2.

xy 平面上の原点を O とし，半円 $x^2+y^2=9,\ y \geqq 0$ を C_1 とおく。半円 C_1 の周上に 2 点 P, Q をとり，弦 PQ を軸として，弧 PQ を折り返し，点 $\mathrm{R}(\sqrt{3}, 0)$ で x 軸に接するようにする。

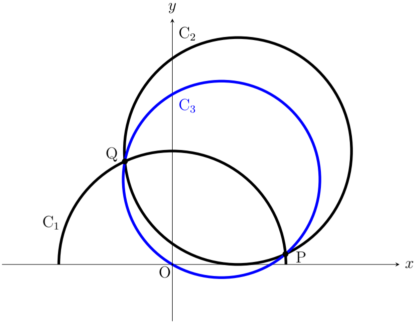
(1) 折り返した円弧を円周の一部にもつ円を C_2 とする。円 C_2 の方程式を求めよ。

(2) 3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{O}, \mathrm{Q}$ を通る円を C_3 とする。円 C_3 の中心の座標および半径を求めよ。

(3) 円 C_2 の周上に点 A を，円 C_3 の周上に点 B をとるとき，線分 AB の長さの最大値を求めよ。



円 $C_1 : x^2 + y^2 = 3^2$ の半径は 3。円 C_2 は点 $R(\sqrt{3}, 0)$ で x 軸に接するので，中心は直線 $x = \sqrt{3}$ 上にある。また，円 C_2 は円 C_1 を折り返した円なので半径は 3 である。
したがって，円 C_2 の中心の座標は $(\sqrt{3}, 3)$ であるので，方程式は $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 3^2$ である。

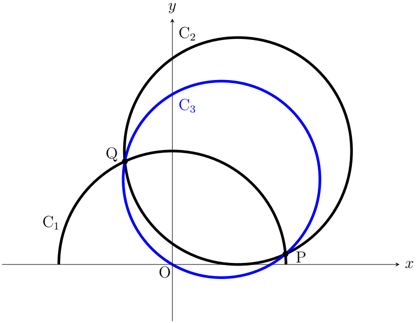


2 円の交点を通る円

2 円 $x^2+y^2+lx+my+n=0,\ x^2+y^2+l'x+m'y+n'=0$ の交点を通る円は

$(x^2+y^2+lx+my+n)+k(x^2+y^2+l'x+m'y+n')=0$

$k=-1$ のときは，交点を通る直線を表す。

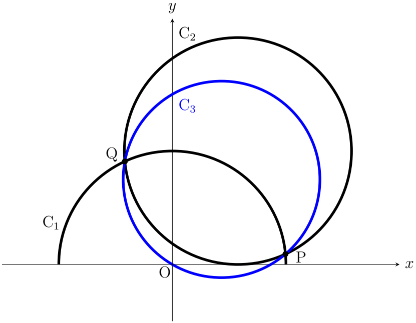


円 C_1, C_2 の交点を通る円は

$$\left\{(x-\sqrt{3})^2+(y-3)^2-3^2\right\}+k(x^2+y^2-3^2)=0$$

と表せる。

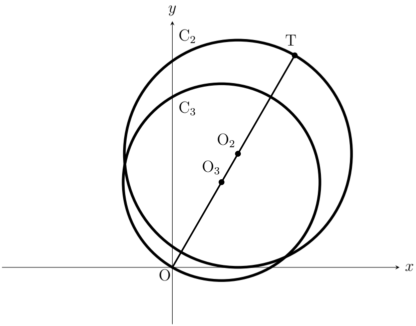
これが原点 $(0,0)$ を通るから，$3-9k=0$ より $k=\dfrac{1}{3}$



円 C_3 の方程式は

$$\left\{(x-\sqrt{3})^2+(y-3)^2-3^2\right\}+\frac{1}{3}(x^2+y^2-3^2)=0$$

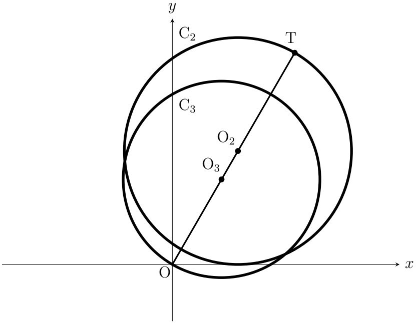
$$\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$$



円 C_2, C_3 の中心はそれぞれ $(\sqrt{3},\ 3)$, $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\ \dfrac{9}{4}\right)$ であるから,

中心間の距離は $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(3-\dfrac{9}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

練習問題 2. 解答 (3)



円 $\mathrm{C_2}$ の周上の点 A と，円 $\mathrm{C_3}$ の周上の点 B について，線分 AB の長さが最大となるのは，A が T に，B が O にあるときである。

したがって，線分 AB の長さの最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+3=2\sqrt{3}+3$

練習問題 3.

xy 平面上の放物線 $\mathrm{A} : y = x^2$, $\mathrm{B} : -(x-a)^2 + b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ $(x_1 > x_2)$ で交わるとする。

(1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき，b を a で表せ。

(2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め，図示せよ。

練習問題 3. 解答 (1)

点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ $(x_1 > x_2)$ は
放物線 $\mathrm{A} : y = x^2$, $\mathrm{B} : -(x-a)^2 + b$ の交点だから,
x_1, x_2 は，方程式 $x^2 = -(x-a)^2 + b$ の解である。
整理して，$2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0 \ \cdots$ ①
解と係数の関係を用いて,

$$x_1 + x_2 = a,\ x_1 x_2 = \frac{a^2 - b}{2}$$

$x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき,

$$2^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = a^2 - 2(a^2 - b)$$

$-a^2 + 2b = 4$ より

$$b = \frac{a^2 + 4}{2}$$

練習問題 3. 解答 (2)

$b = \dfrac{a^2+4}{2}$ より，方程式 ① は

$$2x^2 - 2ax + a^2 - \frac{a^2+4}{2} = 0$$

$$4x^2 - 4ax + a^2 - 4 = 0$$

$$\{2x - (a+2)\}\{2x - (a-2)\} = 0$$

$$x = \frac{a+2}{2},\ \frac{a-2}{2}$$

したがって，$x_1 = \dfrac{a+2}{2}$，$x_2 = \dfrac{a-2}{2}$ である。

練習問題 3. 解答 (2)

$y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(x_1, x_1^2)$, $\mathrm{Q}(x_2, x_2^2)$ を通る直線は,

$$y = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2}(x - x_1) + x_1^2$$

$$y = (x_1 + x_2)(x - x_1) + x_1^2$$

$x_1 = \dfrac{a+2}{2}$, $x_2 = \dfrac{a-2}{2}$ だから,

$$y = a(x - \frac{a+2}{2}) + \left(\frac{a+2}{2}\right)^2$$

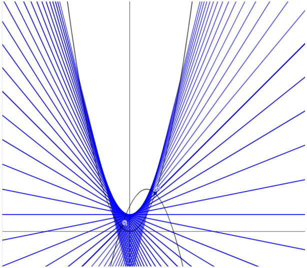
$$y = ax + \frac{-a^2 + 4}{4}$$

a について整理すれば,

$$a^2 - 4xa + 4y - 4 = 0$$

練習問題 3. 解答 (2)

点 (x, y) が直線の通過領域に含まれる条件は，
$a^2 - 4xa + 4y - 4 = 0$ を満たす実数 a が存在することである。
判別式を D として，
$\dfrac{\mathrm{D}}{4} = (2x)^2 - (4y - 4) \geqq 0$ より
$y \leqq x^2 + 1$



練習問題 4.

2 つの直線

$$\ell : (k+1)x + (1-k)y + k - 1 = 0,\ m : kx + y + 1 = 0$$

がある。k がすべての実数値をとるとき，ℓ と m の交点の軌跡を求めよ。

練習問題 4. 解答

$$\begin{cases} \ell: \ (k+1)x + (1-k)y + k - 1 = 0 \\ m: \ kx + y + 1 = 0 \end{cases}$$

連立方程式を解いて，交点の座標を求めると

$$\begin{cases} x = \dfrac{2(1-k)}{k^2+1} \\ \\ y = \dfrac{k^2-2k-1}{k^2+1} \end{cases}$$

次に，k を消去して x, y の方程式を求めるのが大変。

2 直線の交点の座標を (X, Y) とおくと，

$$\begin{cases}(k+1)\mathrm{X}+(1-k)\mathrm{Y}+k-1=0 \cdots ① \\ k\mathrm{X}+\mathrm{Y}+1=0 \cdots ②\end{cases}$$

$\mathrm{X} \neq 0$ であるとき，② より $k=-\dfrac{\mathrm{Y}+1}{\mathrm{X}} \cdots ③$

① を変形して $(\mathrm{X}-\mathrm{Y}+1)k+(\mathrm{X}+\mathrm{Y}-1)=0$

③ を代入して整理して

$$-\frac{(\mathrm{X}-\mathrm{Y}+1)(\mathrm{Y}+1)}{\mathrm{X}}+(\mathrm{X}+\mathrm{Y}-1)=0$$

$$\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}+\mathrm{Y}^2-1=0$$

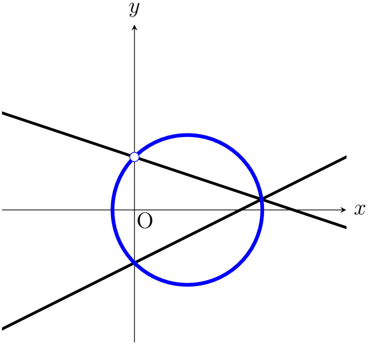
$$(\mathrm{X}-1)^2+\mathrm{Y}^2=2 \cdots ④$$

したがって，交点は中心 $(1, 0)$，半径 $\sqrt{2}$ の円周上にある。

ただし，$\mathrm{X} \neq 0$。

練習問題 4. 解答

$\mathrm{X} = 0$ であるとき，② より $\mathrm{Y} = -1$
このとき，① より $k = 1$ と定まるので，$(0, -1)$ は 2 直線の交点の軌跡上の点である。また，④ の円周上の点である。
したがって求める軌跡は，円 $(x-1)^2 + y^2 = 2$ から $(0, 1)$ を除いた図形である。



練習問題 4. 発展　ベクトル利用

$l : (k+1)x + (1-k)y + k - 1 = 0$
k について整理して，
$(x-y+1)k + (x+y-1) = 0$ より，l は定点 $(0, 1)$ を通る。
$m : kx + y + 1 = 0$
k について整理して，
$xk + (y+1) = 0$ より，m は定点 $(0, -1)$ を通る。

直線 l, m の法線ベクトルは それぞれ $(k+1, 1-k)$, $(k, 1)$ で，そのなす角を θ とすると，

$$\cos\theta = \frac{(k+1, 1-k)\cdot(k, 1)}{\sqrt{(k+1)^2+(1-k)^2}\sqrt{k^2+1^2}} = \frac{k^2+1}{\sqrt{2(k^2+1)}\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，$\theta = 45^\circ$
直線 l, m は常に一定の角度で交わるので，円周角の定理の逆より，交点は同一円周上にあることが導かれる。