KS プロジェクト （2017～2020）

新城門プロジェクト
国公立医学部入試数学講座

Vol③

新モンゴル小中高一貫学校＆海城中学高等学校　共同講座

はじめに

一昨年１１月に開講した「新城門プロジェクト」も第３クール(Vol ③)に入ります。

このクールでは，まずは

“空間ベクトル・複素数平面”

を扱い，その後，いよいよ理系数学の華である

“微分積分”

に入ります。

とりわけ複素数平面は，日本の国公立大学入試のみならず留学生試験である EJU でも重視される項目である一方，受験生の出来は芳しくないところですので，十分な理解が得られ，なおかつ入試問題で難渋することのないように丁寧に解説します。

これまで以上に，添削問題に熱心に取り組むなど，充実した学習が望まれます。
よい仕上げをしていきましょう。

なお，新モンゴル生向の回に海城生が参加することを歓迎します。英文で書かれた留学生の国際試験を体験してみることは君にとってプラスになることでしょう。

（予定）

回・実施時期	①　4 月	②　5 月	③　5 月 新モンゴル生向	④6 月	⑤9 月
テーマ	空間ベクトル 複素数平面	微分法①	EJU 数学模試 （第１回目用）	微分法②	整数（その２）
担当者	川崎真澄	中村哲也	川崎真澄	村山雅之	平山裕之
イベント	なし （150 分授業）	医療ディスカッション	模試解説と補強	医学部受験作戦講話	医療ディスカッション

なお，最終の Vol　④は以下を予定しています(Vol④　のテキストは 9 月始めに配信します）

回・実施時期	⑥　9 月 新モンゴル生向	⑦　10 月	⑧　11 月	⑨　12 月	⑩　1 月 海城生向
テーマ	EJU 数学模試 （第２回目用）	積分法①	積分法②	新城門模試③	確率と直前対策
担当者	川崎真澄	中村哲也	村山雅之	平山裕之	川崎真澄
イベント	模試解説と補強	医療ディスカッション	医学部受験作戦講話	模試解説と補強	医学部受験作戦講話

※EJU 試験の第 1 回目は例年 6 月に，同 2 回目は例年 11 月に，それぞれ行われています。

EJU 試験での数学の頻出分野は以下の通りです：

2 次関数，場合の数，整数，三角関数，ベクトル，微分法（数Ⅲ）

なお，添削については，**添削問題の提出は授業後１週間以内**です。

学習サイクルを再掲しておきます：

例えば１回目の「空間ベクトル・複素数平面」についてなら，

　１．基本問題を解く
☞２．練習問題を予習する
☞３．講座に出席する
☞４．講座の復習する
☞５．添削問題に取り組み，担当の先生に提出する
☞６．添削問題の復習をする

ともあれ，いよいよ仕上げの一年が開始されます。実り豊かな楽しい講座にしましょう。

新城門プロジェクト（第１回） テーマ：空間ベクトル，複素数平面

§1. 基本問題（自習用）

空間ベクトル

【１】

四面体 OABC において，三角形 OAB の重心を D，線分 DC を 2：1 に内分する点を E，直線 OE が平面 ABC と交わる点を F とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

【２】

辺の長さが 1 である正四面体 OABC において，辺 AB の中点を D，辺 OC の中点を E とする．2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ．

【３】

空間に 5 点 O，A，B，C，D があり，OA＝OB＝OC＝OD であるとする．

また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とするとき，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$ が成り立つとする．

このとき，次の等式が成り立つことを示せ．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}$

(3)　AB＝CD

【４】

四面体 ABCD において，面 BCD，ACD，ABD，ABC の重心をそれぞれ P，Q，R，S とする．

(1)　PQ と AB は平行であることを示せ．

(2)　四面体 ABCD と四面体 PQRS の体積比を求めよ．

【５】

１辺の長さが１の正四面体 OABC がある．辺 OA，AB，BC を $p:(1-p)$　$(0<p<1)$に内分する点をそれぞれ L，M，N とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{ML}$，$\overrightarrow{MN}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および p を用いて表せ．また，内積 $\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{MN}$ を p を用いて表せ．

(2)　ベクトル $\overrightarrow{LN}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および p を用いて表せ．また，$\overrightarrow{LN}$ の大きさ $|\overrightarrow{LN}|$ を p を用いて表せ．

(3)　$|\overrightarrow{LN}|$ を最小にする p の値を求めよ．また，そのときの三角形 LMN の面積を求めよ．

【６】

四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であり，三角形 OAB の面積と三角形 OAC の面積が等しいとする．

(1)　OB＝OC を示せ．

(2)三角形 ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

【７】

3点A(1，－2，3)，C(－3，2，－1)，D(3，－2，1)に対して，四角形ABCDが平行四辺形となるとき，点Bの座標を求めよ．

【８】

２つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ 0)$ の両方に垂直な単位ベクトルをすべて求めよ．

【９】

2点(3，1，7)，(－1，9，2)を直径の両端とする球面と xy 平面が交わってできる円の半径を求めよ．

【10】

空間のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が，条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{6}$$

を満たしているとする．ただし，a，b は正の数とする．

(1)　a，b の値を求めよ．

(2)　三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(3)　四面体 OABC の体積 V を求めよ．

【11】

xyz 空間上の 2 点 A$(-3,\ -1,\ 1)$，B$(-1,\ 0,\ 0)$を通る直線 l に点 C$(2,\ 3,\ 3)$から下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

【12】

原点を O とする座標平面において，4 点

P$(1,\ 0,\ 0)$，Q$(0,\ 1,\ 0)$，R$(0,\ 0,\ 1)$，S$(7,\ y,\ z)$

をとる．これらの 4 点が同じ平面上にあるとき，

(1)　z を y を用いて表せ．

(2)　線分 OS の長さの最小値を求めよ．

複素数平面

【13】

iを虚数単位とし，$z=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$とする．このとき，$|z|^2$と$\dfrac{1}{z}$を求めよ．

【14】

次の複素数をそれぞれ極形式で表せ．

(1)　$\sqrt{3}+i$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$

【15】

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$のとき，次の複素数の極形式を求めよ．

(1)　$3\bar{z}$　　(2)　$\dfrac{i}{z}$　　(3)　$(1-i)z$

【16】

(1)　$1-\sqrt{3}i$ および $1+i$ を極形式で表せ．

(2)　$\dfrac{1+i}{1-\sqrt{3}i}$ を極形式で表せ．

(3)　$\left(\dfrac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^8$ を求めよ．

【17】

複素数zが$|z|=1$，$|z-\sqrt{3}|=\sqrt{7}$を満たすとき，$z+\bar{z}$の値を求めよ．

【18】

複素平面上で$3-i$，$2+3i$，$-1-2i$を表す点をそれぞれA，B，Cとするとき，

(1)　ACの中点Mを表す複素数を求めよ．

(2)　線分BA，BCを2辺とする平行四辺形ABCDの頂点Dを表す複素数を求めよ．

【19】

複素平面上の点$1+i$を原点のまわりに時計の針と反対向きに$\frac{\pi}{6}$だけ回転させた点を求めよ．

【20】

複素数平面において，複素数$4-5i$が表す点をA，$-1-3i$が表す点をBとする．点A，Bを頂点とする正三角形の他の頂点を表す複素数を求めよ．

【21】

複素数平面上において，複素数 z_1，z_2，z_3 の表す点をそれぞれ P，Q，R とする．

(1)　P，Q，R が一直線上にあり，かつ Q が線分 PR を 2：1 に内分するとき，$\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$ の値を求めよ．

(2)　△PQR が PQ：QR：RP＝3：4：5 なる三角形であるとき，$\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$ の値を求めよ．

【22】

複素平面上の 3 点 $P_1(z_1)$，$P_2(z_2)$，$P_3(z_3)$ が $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=1+\sqrt{3}i$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\angle P_2P_1P_3$ を求めよ．　　　　(2)　$P_1P_2 : P_1P_3$ を求めよ．

【23】

複素数平面上で点zが$|z-1|=1$で表される図形上を動くとき，$w=2z+i$の表す点がえがく図形を図示せよ．

【24】

方程式 $z\bar{z}-iz+i\bar{z}-3=0$ を満足するzは複素平面上で円周を作る．この円の中心と半径とを求めよ．

【25】

複素数平面上で関係式 $2|z-i|=|z+2i|$ を満たす複素数 z の描く図形 C を求め，図示せよ．

【26】

$z+\dfrac{1}{z}$ が実数であるような複素数 z の描く図形を，複素数平面上に図示せよ．

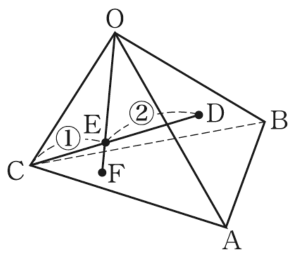
【27】

$\alpha=1+\sqrt{3}i$ に対し，$|z-\alpha|=1$ を満たす複素数 z の中で偏角が最小となるような z の値を求めよ．ただし，偏角は 0 以上 2π 未満で考えるものとする．

＜基本問題の解答と解説＞

$\boxed{\text{空間ベクトル}}$

【1】



(1)　D は三角形 OAB の重心であるから，

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

(2)　E は線分 DC を 2：1 に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$$

(3)　点 F は直線 OE 上にあるから，

$$\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OE}$$

$$=\frac{1}{9}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{9}k\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{OC}$$

とおける．ただし，k は実数である．

点 F は平面 ABC 上にあり，4 点 O，A，B，C は同一平面上にないから，

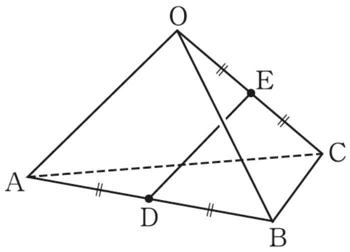
$$\frac{1}{9}k+\frac{1}{9}k+\frac{2}{3}k=1$$

$$k=\frac{9}{8}$$

である．よって，

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$$

【2】



$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$， $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}$

であるから， $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\left(1^2+1^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}$

【3】

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$ より， $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{c}+\vec{d}|^2$　　　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2+2\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$ であるから， $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}$

(2)　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$ より， $\vec{a}-\vec{c}=\vec{d}-\vec{b}$ であるから，

$|\vec{a}-\vec{c}|^2=|\vec{d}-\vec{b}|^2$　　　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{d}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

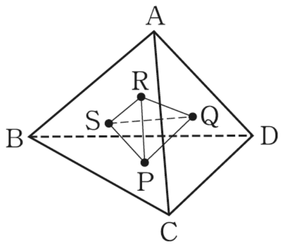
$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$ であるから， $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}$

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$， $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2=|\vec{d}-\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{d}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

ここで， $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$ であることと，(1)より， $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2$

であることがわかるので， $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|>0$， $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|>0$ から，AB＝CD

【4】



(1)　P，Q はそれぞれ，三角形 BCD，三角形 ACD の重心であるから，

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3} \\ \overrightarrow{OQ}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3} \end{cases}$$

よって，

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}-\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

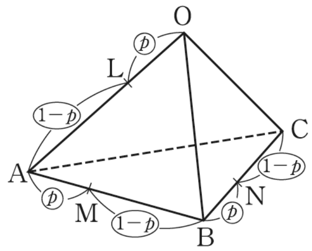
と表されるので，PQ と AB は平行であることが示される．

(2)　(1)より，$|\overrightarrow{PQ}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{BA}|$

であることがわかり，同様に，$|\overrightarrow{PR}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|$，$|\overrightarrow{PS}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{AD}|$，$|\overrightarrow{QR}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{BC}|$，$|\overrightarrow{RS}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{CD}|$

であることもわかるので，四面体 ABCD と四面体 PQRS は相似で，相似比は 3：1 である．
よって，四面体 ABCD と四面体 PQRS の体積比は，$3^3:1^3=27:1$

【5】



(1)　$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=p\vec{a}-\{(1-p)\vec{a}+p\vec{b}\}=(2p-1)\vec{a}-p\vec{b}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\{(1-p)\vec{b}+p\vec{c}\}-\{(1-p)\vec{a}+p\vec{b}\}=(p-1)\vec{a}+(1-2p)\vec{b}+p\vec{c}$

また，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{ML}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\{(2p-1)\vec{a}-p\vec{b}\}\cdot\{(p-1)\vec{a}+(1-2p)\vec{b}+p\vec{c}\}$

$=(2p-1)(p-1)|\vec{a}|^2-p(1-2p)|\vec{b}|^2-(5p^2-5p+1)\vec{a}\cdot\vec{b}-p^2\vec{b}\cdot\vec{c}+p(2p-1)\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=(2p-1)(p-1)-p(1-2p)-\frac{1}{2}(5p^2-5p+1)-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p(2p-1)$

$=2p^2-2p+\frac{1}{2}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{LN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\{(1-p)\vec{b}+p\vec{c}\}-p\vec{a}=-p\vec{a}+(1-p)\vec{b}+p\vec{c}$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{LN}}|^2=|-p\vec{a}+(1-p)\vec{b}+p\vec{c}|^2$

$=p^2|\vec{a}|^2+(1-p)^2|\vec{b}|^2+p^2|\vec{c}|^2-2p(1-p)\vec{a}\cdot\vec{b}+2p(1-p)\vec{b}\cdot\vec{c}-2p^2\vec{c}\cdot\vec{a}$

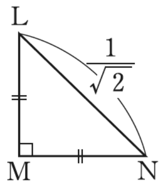
$=p^2+(1-p)^2+p^2-p(1-p)+p(1-p)-p^2$

$=2p^2-2p+1$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{LN}}|>0$より，$|\overrightarrow{\mathrm{LN}}|=\sqrt{2p^2-2p+1}$

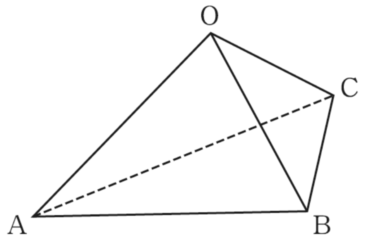
(3)　$2p^2-2p+1=2\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ より，$p=\frac{1}{2}$ のときに，$|\overrightarrow{\mathrm{LN}}|$は最小となる．

このとき，(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0$ であるから，∠LMN＝90° であり，△ALM≡△BMN より，ML＝MN であるから，三角形 LMN は直角二等辺三角形である．



よって，求める面積は，$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$

【6】



(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ より，$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ である．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=k$ とおく．

また，△OAB＝△OAC より，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OC}|^2|\overrightarrow{OA}|^2-(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})^2}$$

$$|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-k^2=|\overrightarrow{OC}|^2|\overrightarrow{OA}|^2-k^2 \qquad |\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2|\overrightarrow{OA}|^2$$

$|\overrightarrow{OA}|>0$，$|\overrightarrow{OB}|>0$，$|\overrightarrow{OC}|>0$ より，　$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$

よって，OB＝OC である．

(2)　G は三角形 ABC の重心なので，　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$ であるから，

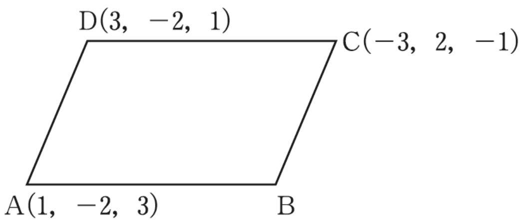
$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2)$$

$$=\frac{1}{3}(k-k+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2)\quad =0$$

$\overrightarrow{OG}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\overrightarrow{OC}$ より，$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{BC}$

【7】



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ より，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=(1,\ -2,\ 3)+(-3,\ 2,\ -1)-(3,\ -2,\ 1)$

$=(-5,\ 2,\ 1)$

よって，点 B の座標は$(-5,\ 2,\ 1)$

【8】

求める単位ベクトルを$\vec{e}=(x,\ y,\ z)$とおくと，$|\vec{e}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$ より，

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x+y+3z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

が得られるので，求める単位ベクトルは，$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ （複号同順）

【9】

2 点$(3,\ 1,\ 7)$，$(-1,\ 9,\ 2)$を直径の両端とする球の中心の座標は$\left(1,\ 5,\ \frac{9}{2}\right)$，半径は$\frac{\sqrt{105}}{2}$

であるから，球面の方程式は，$(x-1)^2+(y-5)^2+\left(z-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{105}{4}$ である．

したがって，この球面と xy 平面とが交わってできる円の方程式は，$z=0$ として，

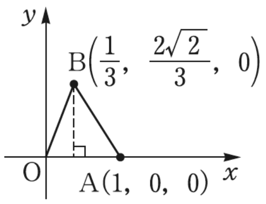
$(x-1)^2+(y-5)^2=6$，$z=0$　　よって，この円の半径は$\sqrt{6}$ である．

【10】

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{3}$ より，$a=\dfrac{1}{3}$ であり，$|\overrightarrow{OB}|=1$ より，$a^2+b^2=1$ が得られて，

これと $b>0$ より，　　$b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(2)



$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

(3)　$\overrightarrow{OC}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，$|\overrightarrow{OC}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{6}$ より，

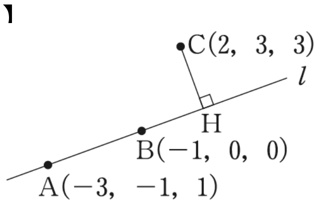
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}y=\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$

が得られるので，点 C の座標は，　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

である．これより，$V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot|z|=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{18}$

【11】



点 H は直線 l 上にあるから，$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$　(t は実数)とおける．すなわち，

$\overrightarrow{OH}=(-3,\ \ -1,\ 1)+t(2,\ 1,\ \ -1)=(2t-3,\ t-1,\ -t+1)$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$(2t-5,\ t-4,\ -t-2)\cdot(2,\ 1,\ -1)=0$　　$6t-12=0$　　$t=2$

よって，点 H の座標は，　　$(1,\ 1,\ -1)$

【12】

(1)　点Sが平面PQR上にあるとき,

$$\overrightarrow{PS}=\alpha\overrightarrow{PQ}+\beta\overrightarrow{PR}$$（α, β は実数）

と表せる．このとき, $(6,\ y,\ z)=\alpha(-1,\ 1,\ 0)+\beta(-1,\ 0,\ 1)$

であるから, 各成分を比べて,

$$\begin{cases} 6=-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

これらの辺々をすべて加えると,　$6+y+z=0$　　$z=-y-6$

(2)　(1)より,

S$(7,\ y,\ -y-6)$

であるから, $OS^2=7^2+y^2+(-y-6)^2=2y^2+12y+85=2(y+3)^2+67$

これより, $y=-3$, $z=-3$ のとき, OSの最小値は $\sqrt{67}$

＜基本問題の解答と解説＞

複素数平面

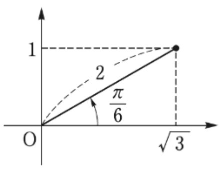
【13】

$z=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき，$|z|^2=1^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{7}{4}$

また，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ であるから，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}{\dfrac{7}{4}}=\dfrac{4-2\sqrt{3}i}{7}$

【14】

(1)　$r\cos\theta=\sqrt{3}$，$r\sin\theta=1$ を満たす r，θ の 1 つは，$r=2$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$



よって，　$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

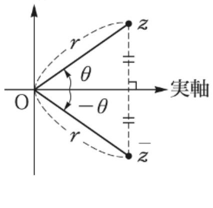
(2)　(1)より，

$$\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\frac{1(\cos 0+i\sin 0)}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(0-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(0-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

【15】

(1)　z と $\bar{z}$ は実軸に関して対称だから，絶対値が等しく，偏角は正負が逆である．

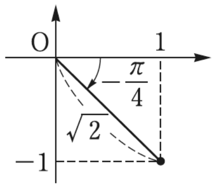


したがって，$\bar{z}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ であるから，$3\bar{z}=3r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

(2)　$i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$であるから，

$$\frac{i}{z}=\frac{1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{r}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}$$

(3)　下図より，$1-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$である．



したがって，

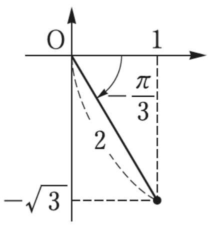
$$(1-i)z=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

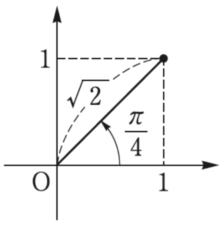
$$=\sqrt{2}r\left\{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

【16】

(1)　次図より，

$$1-\sqrt{3}i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\},\qquad 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$





(2)　(1)より，

$$\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}+i\sin\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

(3)　(2)より,

$$\left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^8=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8\left\{\cos\left(8\cdot\frac{7}{12}\pi\right)+i\sin\left(8\cdot\frac{7}{12}\pi\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{16}\left(\cos\frac{14}{3}\pi+i\sin\frac{14}{3}\pi\right)=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1+\sqrt{3}i}{32}$$

【17】

$|z-\sqrt{3}|=\sqrt{7}$ の両辺を 2 乗すると，$|z|^2-\sqrt{3}z-\sqrt{3}\bar{z}+3=7$

これと $|z|=1$ より，$1-\sqrt{3}(z+\bar{z})+3=7$

よって，$z+\bar{z}=-\dfrac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$

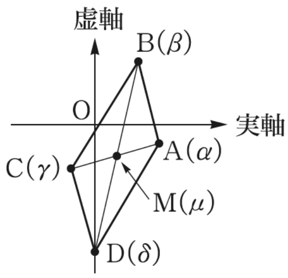
【18】

A，B，C，D，M を表す複素数を順に α，β，γ，δ，μ とおく.

問題文より,

$\alpha=3-i$，$\beta=2+3i$，$\gamma=-1-2i$

(1)　M は AC の中点であるから,



$$\mu=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

$$=\frac{1}{2}\{(3-i)+(-1-2i)\}$$

$$=1-\frac{3}{2}i$$

(2)　M は BD の中点でもあるから,

$$\mu=\frac{1}{2}(\beta+\delta)$$

よって,

$$\delta=2\mu-\beta$$

$$=2\left(1-\frac{3}{2}i\right)-(2+3i)$$

$$=-6i$$

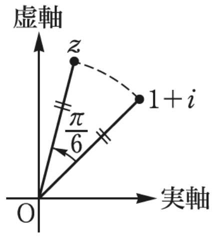
【19】

求める点(を表す複素数)を z とすると,

$$z=(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=(1+i)\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$$

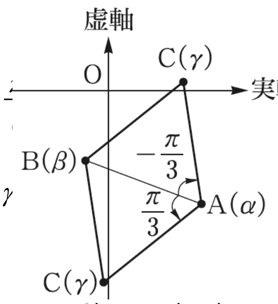
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i\}$$



【20】

正三角形の A, B 以外の頂点を C とし, A, B, C を表す複素数を順に α, β, γ とおく.
問題文より,

$$\alpha=4-5i,\quad \beta=-1-3i$$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を たものが $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから,

γ $+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\}$

$\cdot\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$

$$=\frac{1}{2}(-5+2i)(1\pm\sqrt{3}i)$$

$$=\frac{1}{2}\{(-5\mp2\sqrt{3})+(2\mp5\sqrt{3})i\}$$

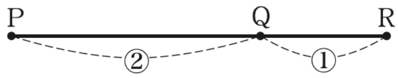
よって,

$$\gamma=\alpha+\frac{1}{2}\{(-5\mp2\sqrt{3})+(2\mp5\sqrt{3})i\}$$

$$=(4-5i)+\frac{1}{2}\{(-5\mp2\sqrt{3})+(2\mp5\sqrt{3})i\}=\frac{1}{2}\{(3\mp2\sqrt{3})+(-8\mp5\sqrt{3})i\}$$ (複号同順)

【21】

(1)　Q が線分 PR を 2：1 に内分するとき

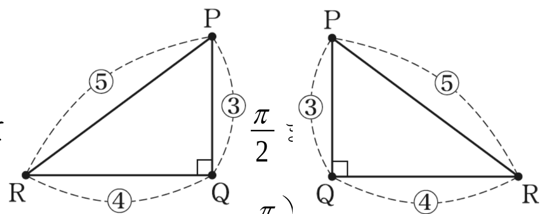


$$\overrightarrow{QR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{QP}$$

である．

よって，　$z_3 - z_2 = -\frac{1}{2}(z_1 - z_2)$ であるから，　$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = -\frac{1}{2}$

(2)　PQ：QR：RP＝3：4：5 であるとき，三角形 PQR は下図のようになる(三平方の定理の逆より∠Q は直角である)．

よって 

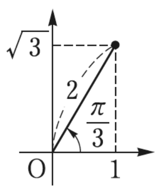
$\frac{\pi}{2}$ したものが $\overrightarrow{QR}$ であるから，

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{4}{3}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

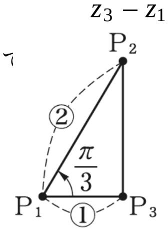
$$= \pm\frac{4}{3}i \quad （複号同順）$$

【22】．

下図より，$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$



したがって，$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ であるから，$\overrightarrow{P_1P_2}$ は $\overrightarrow{P_1P_3}$ を 2 倍して $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し

たもので 

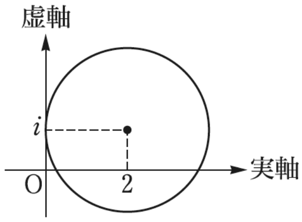
(1)　$\angle P_2P_1P_3 = \frac{\pi}{3}$　(2)　$P_1P_2 : P_1P_3 = 2 : 1$

【23】

$w=2z+i$ より， $z=\dfrac{w-i}{2}$

これを $|z-1|=1$ に代入すると， $\left|\dfrac{w-i}{2}-1\right|=1$　　$|w-i-2|=2$　　$|w-(2+i)|=2$

よって，w の描く図形は，中心が $2+i$，半径が 2 の円であるから，下図のようになる．



【24】

与えられた方程式より，

$|z|^2+\bar{i}z+i\bar{z}=3$　　$|z+i|^2-|i|^2=3$

$|z+i|^2=4$　　$|z-(-i)|=2$

よって，z の描く円の中心は $-i$，半径は 2 である．

別解

与えられた方程式より，

$z\bar{z}-i(z-\bar{z})-3=0$　……(＊)

$z=x+yi$ とおくと，複素数平面上の点 z は xy 平面上の点 $(x,\ y)$ に対応し，この x，y は(＊)より，　$(x^2+y^2)-i\cdot 2yi-3=0$　を満たす．

これを整理すると，　$x^2+y^2+2y-3=0$　　$x^2+(y+1)^2=4$

これは xy 平面上の中心 $(0,\ -1)$，半径 2 の円であるから，対応する複素数平面上の円の中心は $-i$，半径は 2 である．

【25】

与えられた式より，$2^2|z-i|^2=|z+2i|^2$

$4(|z|^2-\bar{i}z-i\bar{z}+|i|^2)=|z|^2+\overline{2i}z+2i\bar{z}+|2i|^2$

$4(|z|^2+iz-i\bar{z}+1)=|z|^2-2iz+2i\bar{z}+4$

$3|z|^2+6iz-6i\bar{z}=0$

$|z|^2-\overline{2i}z-2i\bar{z}=0$

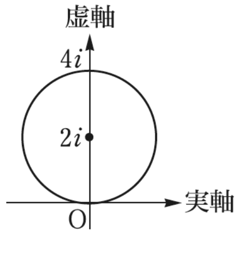
$(z-2i)(\overline{z-2i})-2i\cdot\overline{2i}=0$

$|z-2i|^2-|2i|^2=0$

$|z-2i|^2-4=0$

$|z-2i|=2$

よって，z の描く図形は，中心が $2i$，半径が 2 の円であるから，これを図示すると次のようになる．



別解

P(z)，A(i)，B($-2i$)とおくと，与えられた式は，

2AP＝BP……(＊)

を意味する．

xy 平面上で P，A，B に対応する点を同じく P，A，B で表すと，P(x, y)，A(0, 1)，B(0, -2)となるから，(＊)は次のように表せる．

$2^2\{(x-0)^2+(y-1)^2\}=(x-0)^2+(y+2)^2$

$4(x^2+y^2-2y+1)=x^2+y^2+4y+4$

$3x^2+3y^2-12y=0$

$x^2+y^2-4y=0$

$x^2+(y-2)^2=4$

これは xy 平面上の中心が(0, 2)，半径が 2 の円であるから，対応する複素数平面上の図形は，中心が $2i$，半径が 2 の円である(図は本解と同じ)．

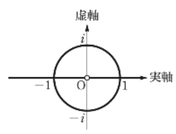
【26】

$z+\dfrac{1}{z}$ が実数である条件は，$z+\dfrac{1}{z}=\bar{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}$

$z-\bar{z}+\dfrac{\bar{z}-z}{z\bar{z}}=0$ 　　　$(z-\bar{z})\left(1-\dfrac{1}{|z|^2}\right)=0$

$z=\bar{z}$ $(z\neq 0)$ または $|z|=1$

よって，z は原点を除く実軸上および原点を中心とする半径 1 の円周上を動く．したがって，z の描く図形は次図の太線のようになる(白丸は除く)．



別解

$z=x+yi$ とおくと，複素数平面上の点 z は xy 平面上の点$(x,\ y)$に対応する．
ところで，$z=x+yi$ のとき，

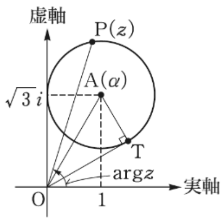
$$z+\frac{1}{z}=z+\frac{\bar{z}}{|z|^2}=(x+yi)+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)i$$

これが実数となる条件は，

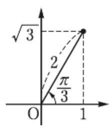
$$y-\frac{y}{x^2+y^2}=0 \qquad y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0$$

よって，$x^2+y^2\neq0$ のもとで，　$y=0$ または $x^2+y^2=1$
これは，xy 平面上で，原点を除く x 軸または原点を中心とする半径 1 の円を表す．したがって，複素数平面上で z の描く図形は，原点を除く実軸および原点を中心とする半径 1 の円である(図は本解と同じ)．

【27】
複素数平面上で，z，α が表す点を P，A とおく．
z が $|z-\alpha|=1$ を満たすとき，P は中心が A，半径が 1 の円周上にある．
z の偏角は，実軸の正の向きから $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の向きまで測った角であるから，これが最小になるのは，P が次図の点 T(原点 O から円に引いた接線の接点)と一致するときである．



ここで，右図より，$\alpha=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$



であるから，α の偏角は $\frac{\pi}{3}$，
α の絶対値は 2 である．よって，

$$\mathrm{OA}=2,\ \mathrm{AT}=1,\ \angle\mathrm{OTA}=\frac{\pi}{2}\text{となるから，}\angle\mathrm{AOT}=\frac{\pi}{6},\ \ \mathrm{OT}=\sqrt{3}$$

であり，z の偏角の最小値(P＝T のときの z の偏角)は，

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

また，このときの z の値は，

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\ \ =\frac{3+\sqrt{3}i}{2}$$

§2. 練習用問題

空間ベクトル

【1】

底面が正方形ABCDで，8辺の長さがすべて1である四角錐PABCDにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{k}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{l}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{m}$とおく．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を$\vec{k}$，$\vec{l}$，$\vec{m}$を用いて表せ．

(2)　内積$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を求めよ．

(3)　辺PBの中点をR，辺PDの中点をSとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$を$\vec{k}$と$\vec{l}$を用いて表せ．

(4)　平面ARSと辺PCとの交点をTとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}$を$\vec{k}$，$\vec{l}$，$\vec{m}$を用いて表せ．

【2】

座標空間において3点P(0，3，3)，Q(3，0，3)，R(3，3，0)を通る平面をLとし，三角形PQRのL内の外接円をCとする．また，点A(8，−7，−7)を中心とし半径rの球面をSとする．SとLの交わりは円Dになり，かつCとDは外接するという．

(1)　円Cの中心Gの座標と半径を求めよ．

(2)　円Dの中心Hの座標を求めよ．

(3)　半径rを求めよ．

【3】

点A(1，2，4)を通り，ベクトル$\vec{n}=(-3,\ 1,\ 2)$に垂直な平面をαとする．平面αに関して同じ側に2点P(−2，1，7)，Q(1，3，7)がある．次の問いに答えよ．

(1)　平面αに関して点Pと対称な点Rの座標を求めよ．

(2)　平面α上の点で，PS＋QSを最小にする点Sの座標とそのときの最小値を求めよ．

複素数平面

【4】

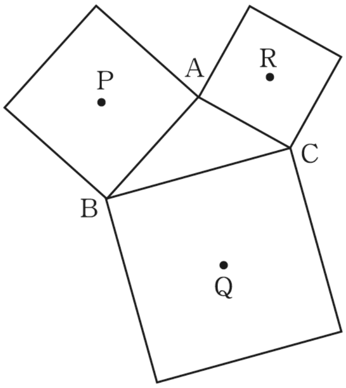
$z^4=-8+8\sqrt{3}i$ を満たす複素数zをすべて求めよ．

【5】

複素数平面上で，A$(1+i)$を中心としてB$(2+3i)$を $\frac{\pi}{2}$ 回転した点を表す複素数を求めよ．
また，P$(4-3i)$，Q，R$(5i)$，Sが正方形の左まわりに見た頂点となるとき，Q，Sを表す複素数を求めよ．

【6】

複素数平面上において，右の図のように三角形ABCの辺AB，BC，CAの外側に正方形を作り，その中心を順にP，Q，Rとする．



(1)　点A，B，Cがそれぞれ複素数α，β，γで表されているとき，点P，Q，Rを表す複素数をα，β，γの式で表せ．

(2)　線分AQと線分PRは長さが等しく，AQ$\perp$PRであることを証明せよ．

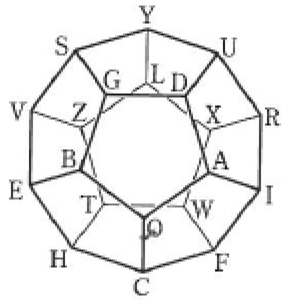
【7】

2つの複素数zとwとの間に，$w=\dfrac{z+i}{z+1}$ なる関係がある．zが複素数平面上の虚軸を動くとき，wの軌跡を求め，図示せよ．

§3. 添削用問題

【1】

正十二面体は互いに合同な 12 個の正五角形を面とする多面体である．その 20 個の頂点はひとつの球(外接球)の上にある．1 辺の長さが 1 の正十二面体の各頂点に図のように名前をつけ，



$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$\cos\dfrac{3}{5}\pi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ である．

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\vec{a}+\vec{b}$ を満たす実数 k を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ は互いに直交することを証明せよ．

(4)　多面体 ODSE－FRLT の名称を述べ，この正十二面体の外接球の直径を求めよ．

【2】

座標空間で点(3，4，0)を通りベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を l，点(2，－1，0)を通りベクトル $\vec{b}=(1,\ -2,\ 0)$ に平行な直線を m とする．点 P は直線 l 上を，点 Q は直線 m 上をそれぞれ勝手に動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

【3】

3つの複素数 $z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_3=-1$ の表す複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ とする．0でない複素数 z に対し，$w=\dfrac{1}{z}$ によって w を定める．z，w が表す複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　Pが線分AB上を動くとき，Qの描く曲線を複素数平面上に図示せよ．

(2)　Pが三角形ABCの3辺上を動くとき，Qの描く曲線を複素数平面上に図示せよ．

新城門プロジェクト（第２回） テーマ：微分法①

※ 極限については自習用の基本問題のみとします。

§1. 基本問題（自習用）

極限

【１】次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+\sqrt{n^2+4n}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{1+5+9+\cdots+(4n-3)}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{2^n+3^{n-2}}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$

【２】

数列$\{a_n\}$は，

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+7)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしている．

(1) $\{a_n\}$の一般項を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

【３】

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+1}-an)$ が収束するような定数 a の値を求めよ．また，そのときの極限値

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+1}-an)$　を求めよ．

【４】

実数 x に対して$[x]$を $m\leqq x<m+1$ を満たす整数 m とする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}$ を求めよ．

【５】

数直線上の点 A の座標を 0，点 B の座標を 1 とし，点 A と点 B の間に点 Q_0 をとり，Q_0 の座標を q_0 とする．

線分 Q_0A の中点を P_1 とし，線分 P_1B の中点を Q_1 とする．

線分 Q_1A の中点を P_2 とし，線分 P_2B の中点を Q_2 とする．

以下，同様にして P_n，Q_n $(n=3,\ 4,\ \cdots)$を定める．また，P_n の座標を p_n，Q_n の座標を q_n とする．

(1)　p_n を q_{n-1} で表せ．

(2)　一般項 p_n，q_n を求めよ．

(3)　$\lim_{n\to\infty} p_n$，$\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ．

【６】

a，b は，$0<a<b$ を満たす定数とし，n を自然数とする．

(1)　不等式 $n\log_2 b<\log_2(a^n+b^n)<n\log_2 b+1$ が成り立つことを証明せよ．

(2)　極限値 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$ を求めよ．

【７】

$a_1>4$ として，漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+12}$ で定められる数列$\{a_n\}$を考える．

(1)　$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$に対して，不等式 $a_n>4$ が成り立つことを示せ．

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して，不等式 $a_{n+1}-4<\dfrac{1}{8}(a_n-4)$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

【８】

数列$\{a_n\}$は，初項 $a_1=3$，公比 5 の等比数列とする．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$

を求めよ．

【９】

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときにはその和を求めよ．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$　　　(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

【10】

無限等比級数

$$(x^2+x)+\frac{x^2+x}{x^2+x+1}+\frac{x^2+x}{(x^2+x+1)^2}+\cdots$$

を考える．

(1)　この無限級数が収束するような x の値の範囲を求めよ．

(2)　(1)のとき，この無限級数の和を求めよ．

【11】

(1)　すべての自然数 n に対して $\dfrac{1}{n^2+6n+8}=\dfrac{A}{n+2}+\dfrac{B}{n+4}$ を満たすような定数 A，B の値を求めよ．

(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+8}$ の和を求めよ．

【12】

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1-x}{x^2}$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$ を求めよ．

【13】

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin \pi x)}{x}$ を求めよ．

【14】

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 3x\tan 5x$ を求めよ．

【15】

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(3x+1+\sqrt{9x^2+4x+1})$ を求めよ．

【16】

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x^2+3x+5}+b}{x-1}=5$

【17】

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{1-e^{2x-2}}$ を求めよ.

【18】

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ を求めよ.

【19】

$\displaystyle\lim_{h\to0}(1-2h)^{\frac{1}{h}}$ を求めよ.

【20】

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\log\frac{x}{2}$ を求めよ.

【21】

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-3\sin x}{2x+\sin x}$ を求めよ.

【22】

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\{\log(x+1)-\log x\}$ を求めよ.

【23】

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x+x-1}{\sin x} & (x\neq0)\\ a & (x=0)\end{cases}$$

が $x=0$ で連続になるように定数 a の値を求めよ.

＜基本問題の解答と解説＞

極限

【1】

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+\sqrt{n^2+4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}=\frac{3}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{1+5+9+\cdots+(4n-3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{\frac{1}{2}n(1+4n-3)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}}=\frac{1}{4}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{2^n+3^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{9}}=9$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1$$

【２】

(1) 漸化式を変形して，

$$a_{n+1}-7=\frac{1}{2}(a_n-7)$$

よって，数列$\{a_n-7\}$は，初項 $a_1-7=-6$，公比$\frac{1}{2}$の等比数列であるから，

$$a_n-7=-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{12}{2^n}$$

$$a_n=7-\frac{12}{2^n}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{12}{2^n}\right)$

$=7$

【3】

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+1}-an)$ が収束するためには，$a>0$ であることが必要である．このとき，

$$\sqrt{4n^2+n+1}-an=\frac{(4n^2+n+1)-(an)^2}{\sqrt{4n^2+n+1}+an}$$

$$=\frac{(4-a^2)n+1+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+a}$$

であるから，$4-a^2\neq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+1}-an)$ は発散し，

$4-a^2=0$ のとき，$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+1}-an)=\frac{1}{2+a}$

以上より，$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+1}-an)$ が収束するとき，$a>0$ から，$a=2$

であり，そのとき，$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+1}-an)=\frac{1}{4}$

【4】

実数 x に対して，$[x]\leqq x<[x]+1$ より，$x-1<[x]\leqq x$

よって，

$$\frac{10^{2n}\pi-1}{10^{2n}}<\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}\leqq\frac{10^{2n}\pi}{10^{2n}}$$

が成り立つ．ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10^{2n}\pi-1}{10^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\pi-\frac{1}{10^{2n}}\right)=\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10^{2n}\pi}{10^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\pi=\pi$$

であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}=\pi$$

【５】

(1)　P_nは，線分$\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{A}$の中点であるから，　$p_n=\dfrac{q_{n-1}}{2}$

(2)　Q_nは，線分$\mathrm{P}_n\mathrm{B}$の中点であるから，　$q_n=\dfrac{p_n+1}{2}$

(1)の結果を代入して，　$q_n=\dfrac{q_{n-1}+2}{4}$

これより，

$$q_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(q_{n-1}-\frac{2}{3}\right)$$

となるので，数列$\left\{q_n-\dfrac{2}{3}\right\}$は，公比$\dfrac{1}{4}$の等比数列であり，　$q_n-\dfrac{2}{3}=\left(q_0-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

よって，　$q_n=\dfrac{2}{3}+\left(q_0-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

また，　$p_n=2q_n-1=\dfrac{1}{3}+\left(2q_0-\dfrac{4}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

(3)　(2)の結果より，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{3}$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{2}{3}$

【6】

(1)　$0<a<b$であるから，

$$b^n<a^n+b^n<2b^n$$

各辺，2を底とする対数をとって，

$$n\log_2 b<\log_2(a^n+b^n)<n\log_2 b+1$$

(2)　$\log_2\sqrt[n]{a^n+b^n}=\dfrac{1}{n}\log_2(a^n+b^n)$であるから，(1)より，

$$\log_2 b<\log_2\sqrt[n]{a^n+b^n}<\log_2 b+\frac{1}{n}$$

また，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log_2 b=\lim_{n\to\infty}\left(\log_2 b+\frac{1}{n}\right)=\log_2 b$

であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\log_2\sqrt[n]{a^n+b^n}=\log_2 b$$

よって，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=b$

【7】

(1)「$a_n>4$」……(＊)が成り立つことを，数学的帰納法により示す．

(Ⅰ)　$a_1>4$ であるから，$n=1$ のとき(＊)は成り立つ．

(Ⅱ)　$n=k$ のとき，(＊)が成り立つと仮定する．$a_k>4$ である．このとき，

$$a_{k+1}=\sqrt{a_k+12}>\sqrt{4+12}=4$$

であるから，$n=k+1$ のときも(＊)は成り立つ．

以上，(Ⅰ)，(Ⅱ)より，(＊)は任意の自然数 n に対して成り立つ．

(2)　$a_{n+1}-4=\sqrt{a_n+12}-4$

$$=\frac{(a_n+12)-16}{\sqrt{a_n+12}+4}=\frac{a_n-4}{\sqrt{a_n+12}+4}$$

ここで，(1)より $a_n>4$ であるから，

$$\sqrt{a_n+12}+4>\sqrt{16}+4=8$$

したがって，$a_{n+1}-4<\dfrac{1}{8}(a_n-4)$

(3)　(2)の結果を繰り返し用いて，

$$a_n-4<\frac{1}{8}(a_{n-1}-4)$$

$$<\frac{1}{8^2}(a_{n-2}-4)<\cdots<\frac{1}{8^{n-1}}(a_1-4)$$

これと(1)の結果から，$4<a_n<4+\dfrac{1}{8^{n-1}}(a_1-4)$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}4=\lim_{n\to\infty}\left\{4+\frac{1}{8^{n-1}}(a_1-4)\right\}=4$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=4$$

【8】

数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$は，初項$\dfrac{1}{3}$，公比$r=\dfrac{1}{5}$の等比数列である．

$-1<r<1$ であるから，無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$は収束し，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{12}$$

【9】

(1)　$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

であるから，部分和$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ は，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}$$

よって，無限級数は収束し，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}\right)=\frac{1}{2}$$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ であるから，部分和$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ は，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{N+1}-\sqrt{N})$$

$$=\sqrt{N+1}-1$$

よって，無限級数は発散する．

【10】

(1)　無限等比級数の初項は x^2+x，公比は $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ であるから，収束する条件は，

$x^2+x=0$ または$\left|\dfrac{1}{x^2+x+1}\right|<1$

$x^2+x=0$ のとき，$x=0,\ -1$

$\left|\dfrac{1}{x^2+x+1}\right|<1$となる条件は，

$|x^2+x+1|>1$　　　$x^2+x+1>1$　　　$x(x+1)>0$

$x<-1,\quad 0<x$

以上より，収束するような x の値の範囲は，　　$x\leqq-1,\quad 0\leqq x$

(2)　$x=-1$，0 のとき，求める和は 0

$x<-1$，$0<x$ のとき，求める和は

$$\frac{x^2+x}{1-\dfrac{1}{x^2+x+1}}=\frac{(x^2+x)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)-1}$$

$$=x^2+x+1$$

【11】

(1)　与えられた等式の両辺に，$n^2+6n+8=(n+2)(n+4)$をかけて，

$$1=A(n+4)+B(n+2)$$

これより，　$1=(A+B)n+(4A+2B)$となるから，　$0=A+B$，$1=4A+2B$

より，　$A=\dfrac{1}{2}$，　$B=-\dfrac{1}{2}$

(2)　(1)より，部分和$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+6n+8}$は，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+6n+8}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+4}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=5}^{N+4}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+4}\right)$$

よって，　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+8}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+6n+8}$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+4}\right)=\frac{7}{24}$$

【12】

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)-(1+x)^2}{x^2(\sqrt{2x+1}+1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2(\sqrt{2x+1}+1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{2x+1}+1+x}=-\frac{1}{2}$$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

【13】

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{(1^2-\cos^2 x)\sin x}{x^3\cos x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)}=1^3\cdot\frac{1}{1\cdot(1+1)}\quad=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin\pi x)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin\pi x)}{x\cos(\sin\pi x)}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin\pi x)}{\sin\pi x}\cdot\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot\dfrac{\pi}{\cos(\sin\pi x)}$

$=1\cdot 1\cdot\dfrac{\pi}{1}=\pi$

【14】

$t=\dfrac{\pi}{2}-x$ と置き換えると $x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t\to 0$ だから,

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 3x\tan 5x=\lim_{t\to 0}\cos 3\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\tan 5\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)$

$=\lim_{t\to 0}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-3t\right)\tan\left(\dfrac{5\pi}{2}-5t\right)$

$=\lim_{t\to 0}(-\sin 3t)\cdot\dfrac{1}{\tan 5t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{-\sin 3t}{3t}\cdot\dfrac{5t}{\sin 5t}\cdot\dfrac{3\cos 5t}{5}=(-1)\cdot 1\cdot\dfrac{3\cdot 1}{5}=-\dfrac{3}{5}$

【15】

$t=-x$ とおくと $x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ だから,

$\lim_{x\to-\infty}(3x+1+\sqrt{9x^2+4x+1})=\lim_{t\to\infty}(-3t+1+\sqrt{9t^2-4t+1})$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{(9t^2-4t+1)-(3t-1)^2}{\sqrt{9t^2-4t+1}+3t-1}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{2t}{\sqrt{9t^2-4t+1}+3t-1}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{9-\dfrac{4}{t}+\dfrac{1}{t^2}}+3-\dfrac{1}{t}}=\dfrac{2}{\sqrt{9-0+0}+3-0}=\dfrac{1}{3}$

【16】

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+3x+5}+b}{x-1}=5$ のとき，

$$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x^2+3x+5}+b)=\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+3x+5}+b}{x-1}\cdot(x-1)$$
$$=5\cdot0=0$$

より，$\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x^2+3x+5}+b)=0$ である．

$$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x^2+3x+5}+b)=3a+b$$

に注意すると，$b=-3a$

となる．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+3x+5}+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+3x+5}-3a}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a\{(x^2+3x+5)-3^2\}}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x+5}+3)}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)(x+4)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x+4)}{\sqrt{x^2+3x+5}+3}=\frac{a(1+4)}{\sqrt{1^2+3\cdot1+5}+3}=\frac{5a}{6}$$

だから，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+3x+5}+b}{x-1}=5$ より，$\dfrac{5a}{6}=5$　つまり，$a=6$

以上より，　$(a,\ b)=(6,\ -18)$

【17】

$t=2(x-1)$ と置き換えすると $x\to1$ のとき $t\to0$ だから，

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{1-e^{2x-2}}=\lim_{t\to0}\frac{\left(\frac{t}{2}+1\right)-1}{1-e^t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{e^t-1}{t}}=\frac{\frac{1}{2}}{-1}=-\frac{1}{2}$$

【18】

任意の実数 x に対して $-1\leqq\sin x\leqq1$ だから，$x>0$ のとき，

$$-\frac{1}{x}\leqq\frac{\sin x}{x}\leqq\frac{1}{x}$$

である．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0,\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ だから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

【19】．

$x=-2h$ と置き換えすると $h\to 0$ のとき $x\to 0$ だから，

$$\lim_{h\to 0}(1-2h)^{\frac{1}{h}}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^{-2}=e^{-2}$$

【20】

$t=x-2$ と置き換えすると，$x\to 2$ のとき $t\to 0$ だから，

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\log\frac{x}{2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\log\frac{2+t}{2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

【21】

任意の実数 x に対して $-1\leqq \sin x\leqq 1$ だから，$x>0$ のとき，$-\frac{1}{x}\leqq\frac{\sin x}{x}\leqq\frac{1}{x}$ である．

$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$　$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ だから，はさみうちの原理より，$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

であることに注意すると，$\lim_{x-\infty}\frac{x-3\sin x}{2x+\sin x}=\lim_{x-\infty}\frac{1-3\cdot\frac{\sin x}{x}}{2+\frac{\sin x}{x}}$

$$=\frac{1-3\cdot 0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

【22】

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\{\log(x+1)-\log x\}=\lim_{x\to\infty}x\sin\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{\sin\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\frac{\sin\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\log e\cdot 1=1$$

【23】

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + x - 1}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} + 1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1+1}{1} = 2$$

である．$f(x)$が $x=0$ で連続となる条件は，$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

だから，$a=2$

§1. 基本問題(自習用)

$\boxed{\text{微分法①}}$

【１】
　次の関数の導関数を求めよ.

(1)　$y=x^2\sin x$

(2)　$y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

【２】
関数 $y=\sqrt{x^2+1}$ を微分せよ.

【３】
次の関数を微分せよ.

$x^{\sin x}$　(ただし，$x>0$ とする)

【４】
x の関数 y が媒介変数 θ を用いて $x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$ と表されているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を θ で表せ.

【５】
曲線 $2x^2-2xy+y^2=5$ の点(1，3)における微分係数の値を求めよ.

【６】
曲線 $C_1:y=2\cos x$　$\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $C_2:y=\cos 2x+k$　$\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が共有点 P で共通の接線 l をもつ．ただし，k は定数であり，点 P の x 座標は正とする．k の値と接線 l の方程式を求めよ.

【７】
$f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+2}$ の増減，極値を調べて，グラフを描け.

【８】

関数 $f(x)=(x^2+ax+3)e^x$ が極値をもたないような定数 a の値の範囲を求めよ．また，$y=f(x)$ のグラフが変曲点をもたないような a の値の範囲を求めよ．

【９】

$y=2\cos x+\sin 2x$ の $-\pi \leqq x \leqq \pi$ におけるグラフの概形を描け．ただし凹凸は調べなくてよい．

【10】

$y=\dfrac{x-1}{x^2}$ の増減やグラフの凹凸などを調べ，グラフの概形を描け．

【11】

媒介変数 t によって，

$$\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t^3-3t \end{cases}$$

と表される曲線を C とする．C の概形を xy 平面上に図示せよ．

＜基本問題の解答と解説＞

微分法①

【1】

(1)　$y=x^2\sin x$ のとき，

$$y'=(x^2)'\cdot\sin x+x^2\cdot(\sin x)'=2x\cdot\sin x+x^2\cdot\cos x=x(2\sin x+x\cos x)$$

(2)　$y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ のとき，

$$y'=\frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

【2】

$y=\sqrt{x^2+1}$ のとき，$u=x^2+1$ とおくと，$y=\sqrt{u}\,(=u^{\frac{1}{2}})$

だから，$y'=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

【3】

$y=x^{\sin x}$　$(x>0)$ のとき $y>0$ だから，$\log y=\log x^{\sin x}=\sin x\log x$

つまり，$\log y=\sin x\log x$

この両辺を x で微分すると，

$$\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\log x+\sin x\cdot\frac{1}{x}=\frac{x\cos x\log x+\sin x}{x}$$

よって，$y'=y\cdot\dfrac{x\cos x\log x+\sin x}{x}=(x\cos x\log x+\sin x)x^{\sin x-1}$

【4】

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\qquad \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$$

だから，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

【５】

$2x^2-2xy+y^2=5$ の両辺を x で微分すると，$4x-2y-2x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

だから，$x\neq y$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x-y}$

よって，点(1，3)における微分係数の値は，$\dfrac{2\cdot1-3}{1-3}=\dfrac{1}{2}$

【６】

C_1：$y=2\cos x$,　$y'=-2\sin x$　　C_2：$y=\cos 2x+k$,　$y'=-2\sin 2x$

だから，P の x座標を $t\left(0<t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\begin{cases}2\cos t=\cos 2t+k & \cdots\cdots① \\ -2\sin t=-2\sin 2t & \cdots\cdots②\end{cases}$$

を満たす．

②⇔　$\sin t=2\sin t\cos t$　　$\sin t=0$，$\cos t=\dfrac{1}{2}$

$0<t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ だから，$t=\dfrac{\pi}{3}$ であり，①より，$k=2\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{3}{2}$

また，lの方程式は，$y=-2\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos\dfrac{\pi}{3}$ より，$l:y=-\sqrt{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+1$

【7】

$f(x)$の分母＝$(x-1)^2+1>0$ より定義域は全実数である．

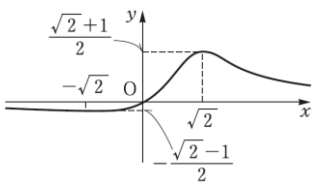
$$f'(x)=\frac{(x^2-2x+2)-(2x-2)x}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{-(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-2+\dfrac{2}{x}}=0$$

より増減は次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$	↗	$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$	↘	

これより，極大値は$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，極小値は$-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ であり，$f(x)$のグラフは次のようになる．



【8】

$$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+3)e^x=\{x^2+(a+2)x+a+3\}e^x$$

$$f''(x)=(2x+a+2)e^x+\{x^2+(a+2)x+a+3\}e^x$$

$$=\{x^2+(a+4)x+2a+5\}e^x$$

$f(x)$が極値をもたない条件は，$f'(x)$が符号変化しないことであるから，

$x^2+(a+2)x+a+3=0$ の判別式を D_1 とすると $D_1\leqq 0$ より，

$$(a+2)^2-4(a+3)\leqq 0 \qquad a^2-8\leqq 0 \qquad -2\sqrt{2}\leqq a\leqq 2\sqrt{2}$$

また，曲線 $y=f(x)$が変曲点をもたない条件は，$f''(x)$が符号変化しないことであるから，

$x^2+(a+4)x+2a+5=0$ の判別式を D_2 とすると $D_2\leqq 0$ より，

$$(a+4)^2-4(2a+5)\leqq 0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2-4\leqq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\leqq a\leqq 2$$

【9】

$y=2\cos x+\sin 2x$ について，

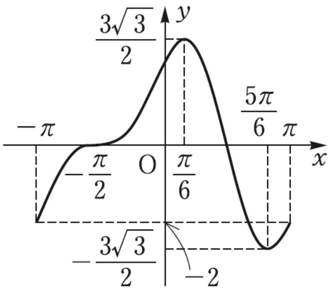
$$y'=2\cdot(-\sin x)+(\cos 2x)\cdot 2$$

$$=-2\{\sin x-(1-2\sin^2 x)\}=-2(2\sin x-1)(\sin x+1)$$

であるから，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ における y の増減は次のようになる．

よ

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2	↗	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	-2



【10】

定義域は $x^2\neq 0$ より $x\neq 0$ である．

$$y'=\frac{x^2-(x-1)2x}{x^4}=\frac{-x+2}{x^3}$$

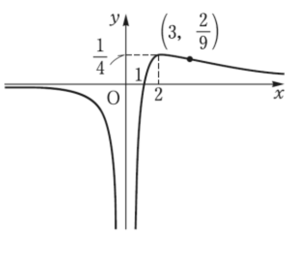
$$y''=\frac{-x^3-(-x+2)3x^2}{x^6}=\frac{2(x-3)}{x^4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=0,\ \lim_{x\to\pm 0}y=-\infty$$

よって，y の増減は次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	(∞)
y'		$-$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	(0)	↘	$(-\infty)\|(-\infty)$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$\frac{2}{9}$	↘	(0)

よってグラフは次のようになる．



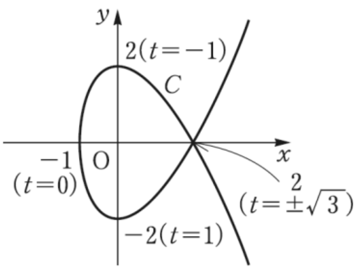
【11】

$$\frac{dx}{dt}=2t,\qquad \frac{dy}{dt}=3(t-1)(t+1)$$

だから，x と y の t に対する増減と点$(x,\ y)$の進む向きは次のようになる．

t	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
(x,y)	$(\infty,-\infty)$	$\nwarrow$	$(0,2)$	$\swarrow$	$(-1,0)$	$\searrow$	$(0,-2)$	$\nearrow$	(∞,∞)

よって，Cの概形は右のようになる．



§2. 練習用問題

微分法①

【1】
a を実数とする．このとき，曲線 $y=e^x$ と $y=(x-a)^2$ の両方に接する直線が存在するような a の値の範囲を求めよ．

【２】

曲線 $C:x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\quad(x>0,\ y>0)$ とする．C 上の任意の点における接線と，x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とするとき，線分 PQ の長さは一定であることを示せ.

【３】

$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ について，関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 $y=f(x)$ の凹凸，変曲点，漸近線を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

【４】

関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ax$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．ただし，e は自然対数の底である.

【５】
媒介変数 θ によって，

$$\begin{cases} x=\cos\theta+\theta\sin\theta \\ y=\sin\theta-\theta\cos\theta \end{cases}\qquad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

と表される曲線を C とする．C の概形を xy 平面上に図示せよ．また，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ の点における接線の方程式を求めよ.

§3. 添削用問題

$\boxed{\text{微分法①}}$

【１】

曲線$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$上を動く点 P の時刻 t における座標を$(x(t),\ y(t))$と表し，P の速度ベクトルを$\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt} \right)$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角は一定であることを示し，その値を求めよ．

【２】

(1)　関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ のグラフを描け．ただし，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ は用いてよい．

(2)　99^{100} と 100^{99} の大小を調べよ．

【３】

関数 $f(x) = e^{-x}\cos x\ (x \geqq 0)$について，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$の極値を与える x の値をすべて求めよ．

(2)　$f(x)$の極小値を与える x の値を小さい順に

$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\quad (0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots)$

とする．

(ア)　a_n を求めよ．

(イ)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ を求めよ．

※ 第 3 回は EJU 模試を実施する予定です。

新城門プロジェクト（第 4 回） テーマ：微分法①

§1. 基本問題（自習用）

【１】

$0<x<1$ で定義された関数 $f(x)=x(\log x)^2$ の最大値を求めよ. ただし, 対数は自然対数である.

【２】

関数 $y=\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}$　$(x>0)$の最小値を求めよ.

【３】

関数 $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{2+\sin x\cos x}$ の最大値と最小値を求めよ.

【４】

O を中心とし，線分 AB を直径とする半径 1 の半円周上の動点を P，Q とする.

$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{POQ}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$を満たす四角形 APQB の面積を $S(\theta)$とする．$S(\theta)$の最大値とそのときの θ の値を求めよ.

【５】

O を原点とする xy 平面において，曲線 $y=e^{-x}$ の接線が，x 軸と y 軸の正の部分とそれぞれ点 P，Q で交わっている．三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ.

【６】

$0\leqq x\leqq\pi$ において，不等式 $x\cos x\leqq\sin x$ を証明せよ.

【７】

a を定数(実数)とする．$e^x\sin x=a$ が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲において解をもつような a の範囲を求めよ.

【８】

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\sin x+\tan x>2x$ が成り立つことを証明せよ.

【９】

a を実数の定数とする．方程式

$$ae^x - x + 2 = 0$$

の実数解の個数を求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を用いてもよい．

【10】

$a<b$ のとき，$e^a(b-a)<e^b-e^a<e^b(b-a)$ が成り立つことを証明せよ．

＜基本問題の解答と解説＞

微分法②

【１】

$$f'(x)=1\cdot(\log x)^2+x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}=(\log x+2)\log x$$

より，増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	最大	↘	

これより，$x=e^{-2}$ のとき $f(x)$ は最大となり，最大値は，$f(e^{-2})=4e^{-2}$

【２】

$$y'=\frac{2xe^{x^2}\sqrt{x}-e^{x^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{(2x+1)(2x-1)e^{x^2}}{2x\sqrt{x}}$$

より，増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	最小	↗

これより，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最小となり，最小値は，$\dfrac{e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}}}=\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}}$

【３】

$f(x)$ は周期 2π の周期関数だから，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で調べればよい．

$$f'(x)=\frac{(\sin x+\cos x)\cdot(2+\sin x\cos x)-(\sin x-\cos x)\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)}{(2+\sin x\cos x)^2}$$

$$=\frac{2(\sin x+\cos x)+\sin^3 x+\cos^3 x}{(2+\sin x\cos x)^2}=\frac{2(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}{(2+\sin x\cos x)^2}$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)(3-\sin x\cos x)}{(2+\sin x\cos x)^2}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)(3-\sin x\cos x)}{(2+\sin x\cos x)^2}$$

より，増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{4}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	↘	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	↗	$-\frac{1}{2}$

これより，最大値は $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，最小値は $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【４】
∠QOB＝$\pi-2\theta$ であり，$S(\theta)$は△AOP，△POQ，△QOB の面積の和なので，

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)$$

$$=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta$$

$$S'(\theta)=\cos\theta+\cos2\theta$$
$$=\cos\theta+(2\cos^2\theta-1)=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$$

これより $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ での増減は次のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		＋	0	－	
$S(\theta)$		↗	最大	↘	

よって，$S(\theta)$は$\theta=\dfrac{\pi}{3}$のときに最大となり，最大値は$S\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

【５】
$y=e^{-x}$の，$x=t$における接線は，$y=-e^{-t}(x-t)+e^{-t}$
つまり，$y=-e^{-t}x+(t+1)e^{-t}$
これより x切片と y切片はそれぞれ $t+1$，$(t+1)e^{-t}$
これらがともに正であるから tの範囲は，$t>-1$
△OPQ の面積を $S(t)$とおくと，

$$S(t)=\frac{1}{2}(t+1)^2e^{-t}$$

$$S'(t)=\frac{1}{2}\left\{2(t+1)e^{-t}+(t+1)^2\cdot(-e^{-t})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(1-t)(t+1)e^{-t}$$

これより $t>-1$ での増減は次のようになる．

t	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		＋	0	－
$S(t)$		↗	最大	↘

よって，$S(t)$は $t=1$ のときに最大となり，
最大値は，
$$S(1)=2e^{-1}$$

【6】

$$f(x)=\sin x-x\cos x$$

とおくと，$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ であることを示せばよい．

$$f'(x)=\cos x-1\cdot\cos x-x\cdot(-\sin x)$$

$$=x\sin x\geqq 0\quad(\because 0\leqq x\leqq\pi)$$

より $f(x)$ は $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で単調増加だから，$f(x)\geqq f(0)=0$

よって，示せた．

【7】

$$f(x)=e^x\sin x$$

とおくと，$y=f(x)$ と $y=a$ が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で共有点をもつような a の範囲を求めればよい．

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

より $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{4}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{e^{\frac{7\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	0

よって求める a の範囲は，$-\dfrac{e^{\frac{7\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\leqq a\leqq\dfrac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$

【8】

$$f(x)=\sin x+\tan x-2x$$

とおくと，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $f(x)>0$ であることを示せばよい．

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2=\frac{\cos^3 x-2\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{(\cos x-1)(\cos^2 x-\cos x-1)}{\cos^2 x}=\frac{(\cos x-1)\left(\cos x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\cos^2 x}$$

$$>0\qquad(\therefore 0<\cos x<1)$$

これより，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $f(x)$ は単調増加であり，$f(x)>f(0)=0$

よって，示せた．

【9】

$$ae^x-x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=(x-2)e^{-x}$$

だから，$f(x)=(x-2)e^{-x}$ とおくと，$y=f(x)$ と $y=a$ の共有点の個数を求めればよい．

$$f'(x)=e^{-x}+(x-2)\cdot(-e^{-x})=(3-x)e^{-x}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e^x}\right)=0,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

だから増減は次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	3	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$	(0)

これより，

$$\begin{cases} 0\text{個} \quad (a>e^{-3}\text{のとき}) \\ 1\text{個} \quad (a=e^{-3},\ a\leqq 0\text{のとき}) \\ 2\text{個} \quad (0<a<e^{-3}\text{のとき}) \end{cases}$$

【10】

$x>a$ に対して，

$$f(x)=(e^x-e^a)-e^a(x-a),\quad g(x)=e^x(x-a)-(e^x-e^a)$$

とおくと，$f(x)>0$ と $g(x)>0$ を示せばよい．

$$f'(x)=e^x-e^a>0 \quad (\because x>a),\quad g'(x)=e^x(x-a)+e^x-e^x=e^x(x-a)>0 \quad (\because x>a)$$

より $f(x)$と $g(x)$はともに単調増加なので，$f(x)>f(a)=0$，$g(x)>g(a)=0$

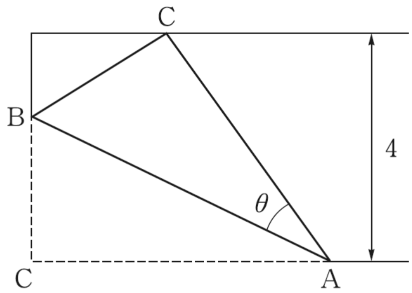
よって，示せた．

§2. 練習用問題

微分法②

【1】

右図のように幅 4 のテープを端点 C が対辺に重なるように折るとき，三角形 ABC の面積が最小になるような θ とそのときの面積を求めよ．



【2】

次の問いに答えよ．

(1)　$a>0$，b を定数とする．実数 t に関する方程式

$$(a-t+1)e^{t}+(a-t-1)e^{-t}=b$$

の解の個数を調べよ．ただし，$\lim_{t\to\infty} te^{-t}=\lim_{t\to-\infty} te^{t}=0$ は既知としてよい．

(2)　点$(a,\ b)$から曲線 $y=e^{x}-e^{-x}$ へ接線が何本ひけるか調べよ．ただし，$a>0$ とする．

【3】

n は自然数とする．

(1)　$x\geqq 0$ ならば，不等式 $e^{x}>\dfrac{x^{n}}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ．

(2)　$\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{n}}=\infty$ が成り立つことを示せ．

【4】

関数 $y=f(x)$の第 2 次導関数 $f''(x)$の値が常に正とする．このとき，実数 a，b，$t(a<b,\ 0\leqq t\leqq 1)$ について，不等式

$$f((1-t)a+tb)\leqq(1-t)f(a)+tf(b)$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，どのような場合か．

§3. 添削用問題

$\boxed{\text{微分法②}}$

【1】

t を定数として xy 平面上の直線 C_t : $y=(x+t)e^t$ を考える．t が $t>0$ の範囲を変化するとき，C_t が通る範囲を求め，その概形を図示せよ．

【2】

関数 $f(x)$は区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において連続で $0 \leqq f(x) \leqq 1$ を満たす. このとき, 次の問いに答えよ.

(1)　$y=f(x)$のグラフと直線 $y=x$ は共有点をもつことを証明せよ.

(2)　$f(x)$が微分可能で$|f'(x)| \leqq \dfrac{1}{2}$を満たすならば,

$$0 \leqq x_1 \leqq 1 \text{ とし，} x_{n+1}=f(x_n),\ \ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

によって定義される数列$\{x_n\}$は，$n \to \infty$のとき収束することを証明せよ.

新城門プロジェクト（第5回） テーマ：整数（その2）

§1. 基本問題（自習用）

☞　本章については，Vol①の第３回の整数（その１）の§１を再度復習することに代える。

§2. 練習問題

【１】

等式

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2$$

を満たす正の整数の組(a, b, c)で $a \geqq b \geqq c$ を満たすものをすべて求めよ．

【２】

p を素数，n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか．

【３】

自然数 a，b，c，d は

$$c=4a+7b,\ d=3a+4b$$

を満たしているものとする．

(1)　$c+3d$ が 5 の倍数ならば $2a+b$ も 5 の倍数であることを示せ．

(2)　a と b が互いに素で，c と d がどちらも素数 p の倍数ならば，$p=5$ であることを示せ．

ただし，2 つの自然数が互いに素とは，1 以外の正の公約数をもたないことをいう．

【４】

2 以上の整数 m，n は $m^3+1^3=n^3+10^3$ をみたす．m，n を求めよ．

§3. 添削問題

【１】

p を 3 以上の素数，a，b を自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき，a と b はともに p の倍数であることを示せ.

(2)　$a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき，a と b はともに p の倍数であることを示せ.

(3)　a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ.

【２】

x，y，z，pは自然数で，

$$xy+yz+zx=pxyz,\quad x\leqq y\leqq z \quad \cdots\cdots①$$

を満たしている．次の問いに答えよ．

(1)　$p\leqq 3$を示せ.

(2)　①を満たす自然数の組$(p,\ x,\ y,\ z)$をすべて求めよ．

【３】

n を 2 以上の整数とする. 自然数(1 以上の整数)の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする. 以下の問いに答えよ.

(1)　連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ.

(2)　連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ.