夏期講習

2022年度　数学科リレー講座

π と i と e の話

１日目　円周率 π

海城中学高等学校　小澤嘉康・吉村歩美

このリレー講座の予定

前半の３日は

円周率 π

自然対数の底 e

虚数単位 i

という特別な３つの数に関する話題を一日ずつ扱う

後半の３日は

これらを結びつける美しい等式

オイラーの等式 $e^{\pi i} + 1 = 0$

を理解するための準備をしてから，じっくり鑑賞する

数について

π，e，i は「数」なので，まずは「数」そのものについて見てみる

自然数

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots$$

・自然数は物を数える数で，もっとも基本的な数の集まり（集合という）

・計算は，　＋　−　×　÷　の四則演算ができる

・しかしながら，

◎ 自然数どうしの　＋　と　×　の結果は再び自然数になるが

▲ 自然数どうしの　−　と　÷　の結果は自然数になるとは限らない

計算の結果がもとの数と同じ集合に入るとき,

その数の集合はその演算で 閉じている という.

つまり,

「自然数の集合は　$+$　で閉じている」

「自然数の集合は　$\times$　で閉じている」

となる.

一方で,

「自然数の集合は　$-$　と　$\div$　では閉じていない」

なので,　$-$　と　$\div$　についてさらに見ていく.

まず　ー　について．

（大きい数）ー（小さい数）は自然数だが，

（小さい数）ー（大きい数）は自然数にならない．

３個のマスクメロンを５人に一人１個ずつ配ると，

途中でマスクメロンがなくなるので，３ー５＝０？

（そもそも０って自然数なの？[1]）

・数の大小で計算できたりできなかったりするのは不便．

→ならば，計算できるように数の数合を拡張しよう！

ということで，「整数」の集合ができる．

[1] 中学高校の教科書では０は自然数に入っていないが，数学界では自然数に０を入れる方が色々都合がいいので，自然数に入れるのが一般的

整数

整数の集合は，自然数から　$-$　ができるように拡張した集合である

つまり，

「整数の集合は　$+$　で閉じている」

「整数の集合は　$-$　で閉じている」

「整数の集合は　$\times$　で閉じている」

である．

次に，$\div$ について

同様に考えて，整数の集合を÷でも計算できるように拡張して，「有理数」の集合ができる．

有理数

有理数の集合は，整数から　÷　ができるように拡張した集合である

つまり，

「有理数の集合は　＋　で閉じている」

「有理数の集合は　−　で閉じている」

「有理数の集合は　×　で閉じている」

「有理数の集合は　÷　で閉じている」

である．

ただし，$\div 0$ はどのように値を定義しても矛盾が生じるので，定義しない（つまり計算として認めない）

$a \div 0$ がだめな理由

$a \neq 0$ のとき.

$a \div 0 = b$ とすると，$a \div 0 = b \Leftrightarrow a = b \times 0 = 0$ となり，$a \neq 0$ に矛盾.

$a = 0$ のとき.

$0 \div 0 = b$ とすると，$0 = b \times 0 = 0$ となり，$0 \div 0 = b$ は任意の数 b で成り立つので計算結果が定まらない．よって，不適. □

ここまでのまとめ（途中経過）

自然数の集合 $\mathbb{N}$　・・・ ものを数える基本的な数．＋と×で閉じている

　　↓　−で閉じるように拡張

整数の集合 $\mathbb{Z}$　・・・　＋−×で閉じている

　　↓　÷で閉じるように拡張

有理数の集合 $\mathbb{Q}$　・・・　＋−×÷で閉じている

〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

※有理数は四則演算＋−×÷が自由にできる数の集合ということ

古代ギリシャのお話

少し話がそれるが，ここでちょっと古代ギリシャのお話

今見たように，有理数は自然数から拡張してある意味「完成された数」と見ることができる.

古代ギリシャでピタゴラスによって開かれたピタゴラス教団では，「万物は数である」と考えていた.

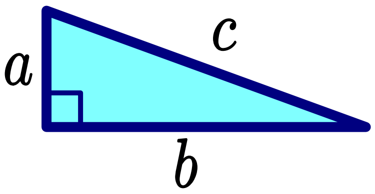
この場合の数は実質有理数のこと.

世の中の全ては有理数で説明できるという信念を持っていた.

ところで，ピタゴラスといえば，ピタゴラスの定理が有名.

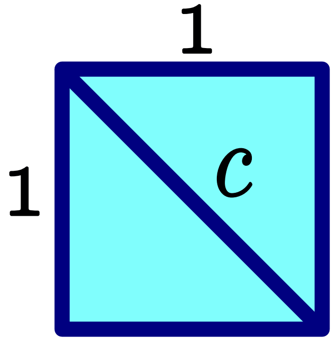
ピタゴラスの定理

直角三角形についての性質で,



$$\Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

これを用いて，一辺の長さが１の正方形の対角線の長さを求めると,



$1^2 + 1^2 = c^2$ なので，対角線の長さ c は２乗すれば２になる数なので

とりあえず $c = \sqrt{2}$ と表す.

では，$\sqrt{2}$ の値はいくつか？

実は $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

ピタゴラス教団的にいえば $\sqrt{2}$ の値は数ではない！

でも対角線の長さ c はある.

でもでも，それを表す数がない！？

このことは門外不出の秘密とされたらしい.

$\sqrt{2}$ が有理数でないことの証明

背理法を用いる．すなわち，$\sqrt{2}$ が有理数だと仮定して矛盾を導く．

互いに素である２つの自然数 a, b を用いて，$\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ と表せたとする．

$a = \sqrt{2}b$ より，両辺２乗して $a^2 = 2b^2$．

すると，a^2 は偶数なので a も偶数．よって，$a = 2a'$ と表せる．

これを $a^2 = 2b^2$ に代入すると，$4a'^2 = 2b^2$ より，$2a'^2 = b^2$．

したがって，b^2 は偶数なので b も偶数．

これより，a も b も偶数になるが，これは a, b が互いに素であることに矛盾する．

よって，$\sqrt{2}$ は有理数でない．　□

さらなる拡張に向けて

$\sqrt{2}$ みたいな数を含むように，有理数をさらに拡張することを考える.

だが，実は簡単ではない！ 計算で閉じるように拡張することが大事.

そもそも $\sqrt{2}$ ってどのくらいの値なの？

有限の小数と，循環小数は分数に直せるので有理数であることに注意.

小数で表すと，だいたい $\sqrt{2} \fallingdotseq \mathbf{1.41421356}$.

でも正確な値ではない. $\because \mathbf{1.41421356^2 = 1.9999999932878736}$.

じゃあ，$\sqrt{2} \fallingdotseq \mathbf{1.414213562373095}$ ではどうか.

これも, $\mathbf{1.414213562373095^2 = 1.999999999999999861967979879025}$

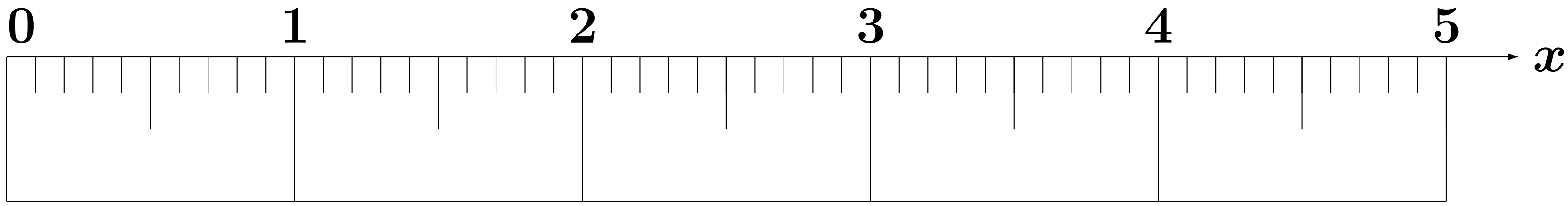
でだめ.

$\sqrt{2}$ は有理数でないので有限の小数では表せるはずがない！

発想を変えて，そもそも $\sqrt{2}$ は一辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さだったので，「長さ」から数を作ることを考える．

ものさし上の点と数とを対応させる．

すなわち，数直線上の点を数の集合とみなす．



有理数を含んでいるし，四則演算でも閉じている[2]ので，有理数の拡張になっている．この数の数合を「実数」という．

実数の中で有理数でない数を「無理数」という．

[2]ここは感覚で．厳密には簡単ではない．

実数 〜 特に 無理数 について

「無理数」は分数で表せない実数のことなので，循環しない無限小数となる.

つまり小数点以下に無限個の数を書いた小数で表される数のこと.

? 「無限」個の数を書い「た」小数 って何？

完了形？ そもそも 無限って 完了できるの？

やっぱり無理数は存在しない！？

$\sqrt{2}$ は正確な値だが，これを小数で表そうとすると絶対に正確には表すことができない.

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276415727350138462309122970249248360558507372126441214970999358314132226659275055927557999505011527820605714701095599716059702745345968620147285174186408891986095523292304843087143214508397626036279952514079896872533965463318088296406206152583523950547457502877599617298355752203375318570113543746034084988471603868999706990048150305440277903164542478230684929369186215805784631115966687130130156185689872372352885092648612494977154218334204285686060146824720771435854874155657069677653720226485447015858801620758474922657226002085584466521458398893944370926591800311388246468157082630100594858704003186480342194897278290641045072636881313739855256117322040245091227700226941127573627280495738108967504018369868368450725799364729060762996941380475654823728997180326802474420629269124859052181004459842150591120249441341728531478105803603371077309182869314710171111683916581726889419758716582152128229518488472089694633862891562882765952635140542267653239694617511291602408715510135150455381287560052631468017127402653969470240300517495318862925631385188163478001569369176881852378684052287837629389214300655869568685964595155501644724509836896036887323114389415576651040883914292338113206052433629485317049915771756228549741438999188021762430965206564211827316726257539594717255934637238632261482742622208671155839599926521176252698917540988159348640083457085181472231814204070426509056532333398436457865796796519267292399875366617215982578860263363617827495994219403777753681426217738799194551397231274066898329989895386728822856378697749662519966583525776198939322845344735694794962952168891485492538904755828834526096524096542889394538646625744927556381964410316979833061852019379384940057156333720548068540575867999670121372239475821426306585132217408832382947287617393647467837431960001592188807347857617252211867490424977366929207311096369721608933708661156734585334833295254675851644710757848602463600834449114818587655554286455123314219926311332517970608436559704352856410087918500760361009159465670676883605571740076756905096136719401324935605

でも正しい値でないということ

・無理数の中には $\sqrt{}$ で表せない数もある．（むしろこっちが主流）

・例えば，円周率は $\sqrt{}$ で表せない．だから π と表す．

π と書けば，それは円周率の正確な値を表すが，

どのくらいの値になるのかを求めるのは大変.

（→今日の後半の話題）

・自然対数の底 e も $\sqrt{}$ で表せない数.（→３日目の話題）

・さらには，$\sqrt{2}$ は２乗したら 2 となる数だが，

２乗したら -1 になる数だってあるはず.

だが，２乗したら -1 になる数は実数ではない.

・なので，２乗したら -1 になる数（の一つ）を i と書いて，

i を含むように実数を拡張して，「複素数」の集合ができる.

・つまり，$i^2 = -1$ である.

・実数から複素数への拡張は容易.（→２日目の話題）

数の拡張のまとめ

自然数の集合 $\mathbb{N}$　・・・ ものを数える基本的な数．＋と×で閉じている

　　↓　−で閉じるように拡張

整数の集合 $\mathbb{Z}$　・・・　＋−×で閉じている

　　↓　÷で閉じるように拡張

有理数の集合 $\mathbb{Q}$　・・・　＋−×÷で閉じている

〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

　　↓　無限小数を追加（ここの拡張は容易でない）

実数の集合 $\mathbb{R}$

　　↓　２乗して -1 になる数 i を追加

複素数の集合 $\mathbb{C}$

無限に関するエトセトラ

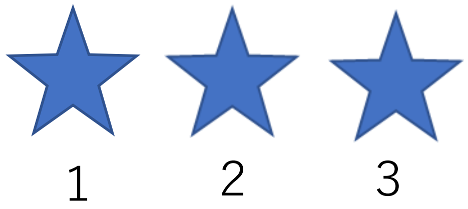
1. 自然数的無限
   ～無限ホテルのパラドックス～
2. 「無限回」のくりかえしは可能か？無限小に関する葛藤
   ～アキレスと亀～
3. いろいろな無限
   ～自然数的無限と実数的無限～
4. おまけ：連続体仮説

自然数

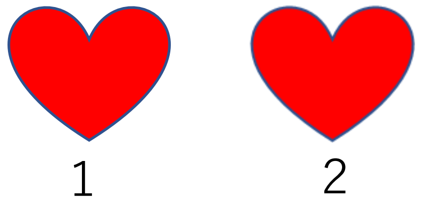
- $\emptyset = 0$
- $\{\emptyset\}=\{0\}=1$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}=\{0,1\}=2$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}=\{0,1,2\}=3$

…以下同様に定めることができる.

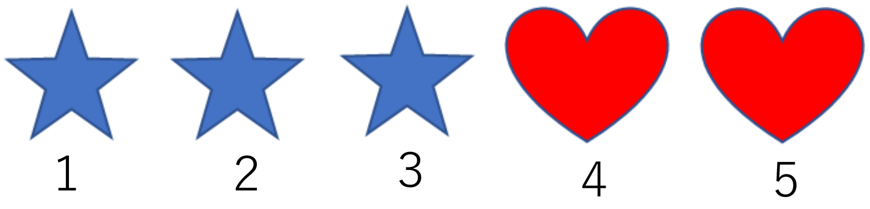
自然数の足し算のイメージ（３＋２＝５）



☆３つに，順番に１，２，３と番号をつける



♡２つに，順番に１，２と番号をつける



☆と♡なら☆が先，数字は小さい順に並べる
というルールでこれらの図形を並べて，改めてそれを「順番に」数える

先ほどまでで定めた「＋１」によって，際限なく自然数をつくることができて，
それら自然数すべての集合が存在する.

→１，２，３，…と数えることを想像すると，
実際に，数え終わらない.
自然数は「無限個」存在する！

無限に関するパラドックス１
～無限ホテルの客～

- あるホテルには，無限個の部屋があるという．
  既にすべての部屋に客が泊まっている．

- そこへ旅人がやってきて，今晩泊めてはもらえないだろうかという．

- ホテルの支配人は少し考えてこういった；
  「お客様がた，ご自分のお部屋の番号より1つ大きい番号のお部屋へご移動いただけますか？」

  →既に部屋に入っている客たちが1つずつ部屋をずれてくれたので，
  旅人は無事に無限ホテルに宿泊できた．

無限に関するパラドックス１
～無限ホテルの客～

- この話の不自然に感じられる点は？

  →すでに満室なのに，客が移動しただけで部屋があくのか？

  →1つずつずれているのだから，旅人が最初の部屋に入った分，最後の部屋に泊まっていた客は，泊まる部屋がなくなったのでは？

  →客それぞれからすれば，1つだけ部屋を移動しているわけだが，全体でみたら，無限の数の人が一気に動くというのは，なかなか大がかりなのでは？

無限に関するパラドックス１
～無限ホテルの客～

- 「有限」と「無限」の違いは？？

  この話を，「100万人泊まれるホテル」に置き換えて考えると，
  さっき考えたような問題がおきる．つまり，

  「1号室に旅人が入った分，1,000,000号室の客は999,999号室の客に押し出されて，**泊まる部屋がなくなってしまう**」

  1,000,000という数は，とても大きいが，「有限」である！

無限に関するパラドックス１
～無限ホテルの客～

- 「有限」と「無限」の違いは？？

  「有限」においては…
  ある自然数と，それよりも大きい自然数を比べたとき，2つの自然数の大きさが等しくなることはない.

  「無限」においては…
  「自然数全体」の大きさと「1＋自然数全体」の大きさが等しい，のようなことが起こりうる（ホテルの部屋数が大きさにあたる．人数が1人ふえても全員泊まれている状況がこれ！）
  無限においては，有限のときのように「部屋がすべて埋まっている→もう追加では泊まれない」というわけではないのである.

無限に関するパラドックス１
～無限ホテルの客～（＋α）

- 今回は，1人だけ旅人を追加で泊めることを考えているが，
  じつは，現在泊っている宿泊者が，それぞれの友人を1人ずつ連れてきたとしても，その友人たち全部を泊めることができる．
  （もちろん，相部屋ではなく，それぞれにちゃんと部屋を用意できる！）
- 無限個の対象に対して，「大きさ」とは，「1対1に対応付ける」ということをベースに考えられる．さっきの例の場合は，

  旅人…1号室
  ｎ号室の客…（n+1)号室

  と対応している．

無限に関するパラドックス２
～アキレスと亀～

- 自然数

$$1 = 0.999 \ldots$$

- 有理数

$$\frac{2}{3} = 0.666 \ldots$$

のように，循環小数の形で表すことができる．

- 無理数

$$\pi = 3.1415 \ldots$$

などのように，循環しない小数の形で表すことができる．

無限に関するパラドックス２
～アキレスと亀～

ギリシャの俊足アキレスと，のんびりな亀が競争をすることになった．

亀はアキレスよりも100メートル先からスタートし，亀の進むスピードはアキレスの10分の1であるとしよう．

このルールのもとで，「アキレスは亀を追い越すことができない」

→ほんとに？

無限に関するパラドックス２
〜アキレスと亀〜

- アキレスが，亀のいた100メートル先の地点に着くころには亀はそこから10メートル進んでいる．（追い越せていない）

  その10メートル分アキレスが進むころには，ふたたび亀はそこから1メートル進んでいる（まだ追い越せていない）

  その1メートル分アキレスが進むころには，ふたたび亀は…
  あれ，こんなことを続けていても，永遠にアキレスは亀に追いつけないのでは？

無限に関するパラドックス２
～アキレスと亀～

アキレス	100	10	1	0.1	0.01	0.001
亀	10	1	0.1	0.01	0.001	0.0001

アキレスの進んだ距離の合計＝100+10+1+0.1+0.01+0.001+…
亀の進んだ距離の合計＝10+1+0.1+0.01+0.001+0.0001+…

どちらも，永遠に足す作業をくりかえすが，「永遠に長い距離を進み続ける」わけでもないし，「永遠に長い時間進み続ける」わけではなく，アキレスが亀に追いつくまでの距離も時間も，ある有限の値に近づくはずである．

無限に関するパラドックス２
～アキレスと亀～

- 実際に，計算してみよう；

  アキレスの進む速度を10m/秒，亀の進む速度を1m/秒として，
  アキレスが亀に追いつくまでの時間をt（秒）とする．そのとき，

$$10t = 1t + 100$$

$$t = \frac{100}{9} = 11.1111\ldots$$

  実際，11秒とすこしの時間があれば，アキレスは亀に追いついてしまう．

無限に関するパラドックス２
～アキレスと亀～

- どうして「追いつかない」感じがするのか？

  →無限回のステップを繰り返しているから，すべてのステップをし尽くして追いつくところまでいくことは不可能？

  実際は，追いつくまでの距離の和，かかる時間の和は確かに無限回足し合わせることで得られているが，足す数の大きさが次第に小さくなっていき，この場合は「無限に長い距離」「無限に長い時間」にはならないことがミソである！

無限に関するパラドックス２
～アキレスと亀～

他にも，こんなパラドックスがある；

「飛んでいる矢は静止している」
→ある瞬間において，矢はある地点にある．その瞬間においては矢はその地点にあって動いていない．よって飛んでいる矢は静止している．

このパラドックスは，時間というものが，「それ以上分割され得ない点」からなっていると考えていることから生じる．
→無限に小さく，それ以上小さくなりえない時間の単位「無限小時間」というものは存在するのか？

無限に関するパラドックス２
～アキレスと亀～

- 今みてきたパラドックスは，「無限回のステップをもつ試行」，「無限に小さい単位距離・時間の存在」など，無限に関する内容であった．

  こうした無限に関する話題，議論は，時代背景，人々の宗教観によってはタブー視されたこともある．

  時代の潮流に時にはのり，時には逆らいつつ，数学者や哲学者は「無限」という概念に迫ろうとした．

自然数的な「無限」と実数的な「無限」

- 今まで見てきた，「自然数全体」という「無限」．

→これよりも大きい「無限」はあるのか？

自然数的な「無限」と実数的な「無限」

- 今まで見てきた，「自然数全体」という「無限」．
→これよりも大きい「無限」はあるのか？

「自然数全体」の大きさよりも大きい「無限」も存在する！

- そのような「無限」のひとつに，「実数全体の集合」がある．

  先ほど少し説明したが，「自然数全体」と「実数全体」の大きさを比べるには，自然数それぞれから実数それぞれへと，1対1になるような対応があるかどうか考えればよい．

自然数的な「無限」と実数的な「無限」

- 以下のステップで，「自然数全体」と「実数全体」の間の1対1対応が作れるかどうか考えてみよう．

1. まずは，「自然数全体」と，「0より大きく1以下であるような実数全体」の対応を考えよう．
2. 後者の方が「大きい」，つまり1対1の対応がないならば，「0より大きく1以下であるような実数全体」よりも「実数全体」は大きいか，少なくとも同じ大きさにはなるので，「自然数全体」の大きさ＜「実数全体」の大きさ
となる．

自然数的な「無限」と実数的な「無限」

- $1 \ \rightarrow 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\dots$
- $2 \ \rightarrow 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\dots$
- $3 \ \rightarrow 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\dots$
- $4 \rightarrow \ 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\dots$

上のように，自然数1つに対して，0より大きく1以下であるような実数から，任意に1つとって対応させてみる．（1つずつ結びつけることだけを気にしているので，小さい順に並べなくてはいけないわけではない．）

自然数的な「無限」と実数的な「無限」

- 1 $\to 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\dots$
- 2 $\to 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\dots$
- 3 $\to 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\dots$
- 4 $\to 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\dots$

このように対応させた小数たちから，それぞれ1つずつ値をとってくる．上に示したように，対角線状にとってきて，それを順番に並べて

$$0.a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\dots$$

のような小数を新たに作ることができる．

自然数的な「無限」と実数的な「無限」

- 例

$$\begin{aligned} 1 &\to 0.3847\ \ldots \\ 2 &\to 0.6254\ \ldots \\ 3 &\to 0.1119\ \ldots \\ 4 &\to 0.6552\ \ldots \end{aligned}$$

となるとき,

$0.a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\ldots = 0.3212\ldots$

である.

自然数的な「無限」と実数的な「無限」

- ここで，新しくつくった小数の，各位の数字をみたときに，
  1. 奇数ならばそれを2におきかえる
  2. 偶数ならばそれを1におきかえる

というルールで置き換えを行い，さらに新しい小数をつくる．

$$0.a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\ldots=0.3212\ldots$$

$$\downarrow$$

$$0.a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\ldots=0.2121\ldots$$

自然数的な「無限」と実数的な「無限」

- ここでつくられた，新しい実数（xとしておこう）は，それぞれの自然数に対応させた実数たちのどれとも一致しない！

→ほんとに？

$$1 \rightarrow 0.3847\ \ldots \neq 0.2121\ldots$$
$$2 \rightarrow 0.6254\ \ldots \neq 0.2121\ldots$$
$$3 \rightarrow 0.1119\ \ldots \neq 0.2121\ldots$$
$$4 \rightarrow 0.6552\ \ldots \neq 0.2121\ldots$$

無限小数の，少なくとも1つの桁（対角線上にある値）は違う値になるように作っているので， x はほんとうにどの実数とも等しくない！

自然数的な「無限」と実数的な「無限」

- ここまででわかったこと

  →「自然数全体の集合」から「0より大きく1以下である実数全体の集合」への対応を作ろうとすると，自然数に対応させられていない，全く別の実数（さっきｘとおいたようなもの）があるから，これら2つの集合を1対1に対応づけることはできない.

  ということは，「0より大きく1以下である実数全体の集合」より大きいか，少なくとも同じ大きさとなる「実数全体の集合」は「自然数全体の集合」よりも「大きい」

自然数的な「無限」と実数的な「無限」＋ α

- ここまでで，「自然数的無限」「実数的無限」が大きさの異なる無限であることをみてきた．それぞれ，「可算無限」「非可算無限」とよぶ.
- 次に気になることとしては，さらに別の「無限」は存在するのか？ということである.

  →実際，さらに「大きい」無限は存在することが知られている.

おまけ：連続体仮説についてひとこと！

- 連続体仮説とは

  『可算濃度（自然数全体の集合の「大きさ」）と
  連続体濃度（実数全体の集合の「大きさ」）の間には他の濃度（集合の「大きさ」）は存在しない』

  という仮説のこと.
  ドイツの数学者，カントールによって提唱された仮説.
  現在，この仮説は，一般的な数学の公理系からは証明も反証（成り立たないことを証明すること）もできない，と結論づけられている.

さらに気になる人は…

- ～無限ホテルの客～
  順序数・基数・自然数・全単射・濃度・ヒルベルト

- 自然数的な「無限」と実数的な「無限」
  カントール・可算無限・対角線論法・連続体仮説
  コーエン・ゲーデル

☆上記のキーワードから，数学書を手にとってみたり，インターネットで検索してみると面白いでしょう．

参考文献

- 『キューネン数学基礎論講義 The Foundations of Mathematics』
  ケネス・キューネン著 藤田博司訳 （日本評論社）
- 『集合論 独立性証明への案内 SET THEORY, An introduction to Independence Proofs』
  ケネス・キューネン著 藤田博司訳 （日本評論社）
- 『無限小 世界を変えた数学の危険思想』
  アミーア・アレクサンダー著 足立恒雄訳 （岩波書店）

↑最初のふたつの文献は，専門書ですが，『無限小』に関しては数学の歴史を追っていく読みものですので，数学の得意・不得意に関わらず，歴史に興味がある人，読書が好きな人にはおすすめです．

おわりに

- 無限は怖い？

  →でも結構面白い…かも！

このあとは…
実際に，プログラムを用いてπの値に迫ってみよう．

円周率のはなし

円周率の定義

すべての円は相似なので，円の直径と円周の長さの比率は，どの円でも同じ．その直径に対する円周の長さの比率を 円周率 と定義する．

・だいたい３より大きいことは昔から知られていた．

・実用的には，$\mathbf{3.1}\quad \dfrac{\mathbf{22}}{\mathbf{7}}\quad \mathbf{3.14}\quad \mathbf{3.16}$ で十分だった．

・それ以上の正確な値は，生活の中では必要ない．

・なお，円周率は直径と円周の長さの関係なので，

円の面積が $\boldsymbol{\pi r^2}$ となるのは自明ではない．（証明すべきこと）

円周率の近似値のざっくりとした歴史

・古代ギリシャ〜微積分まで

円に内接・外接する多角形から求める

・微積分の発見後

無限和・無限積の公式による

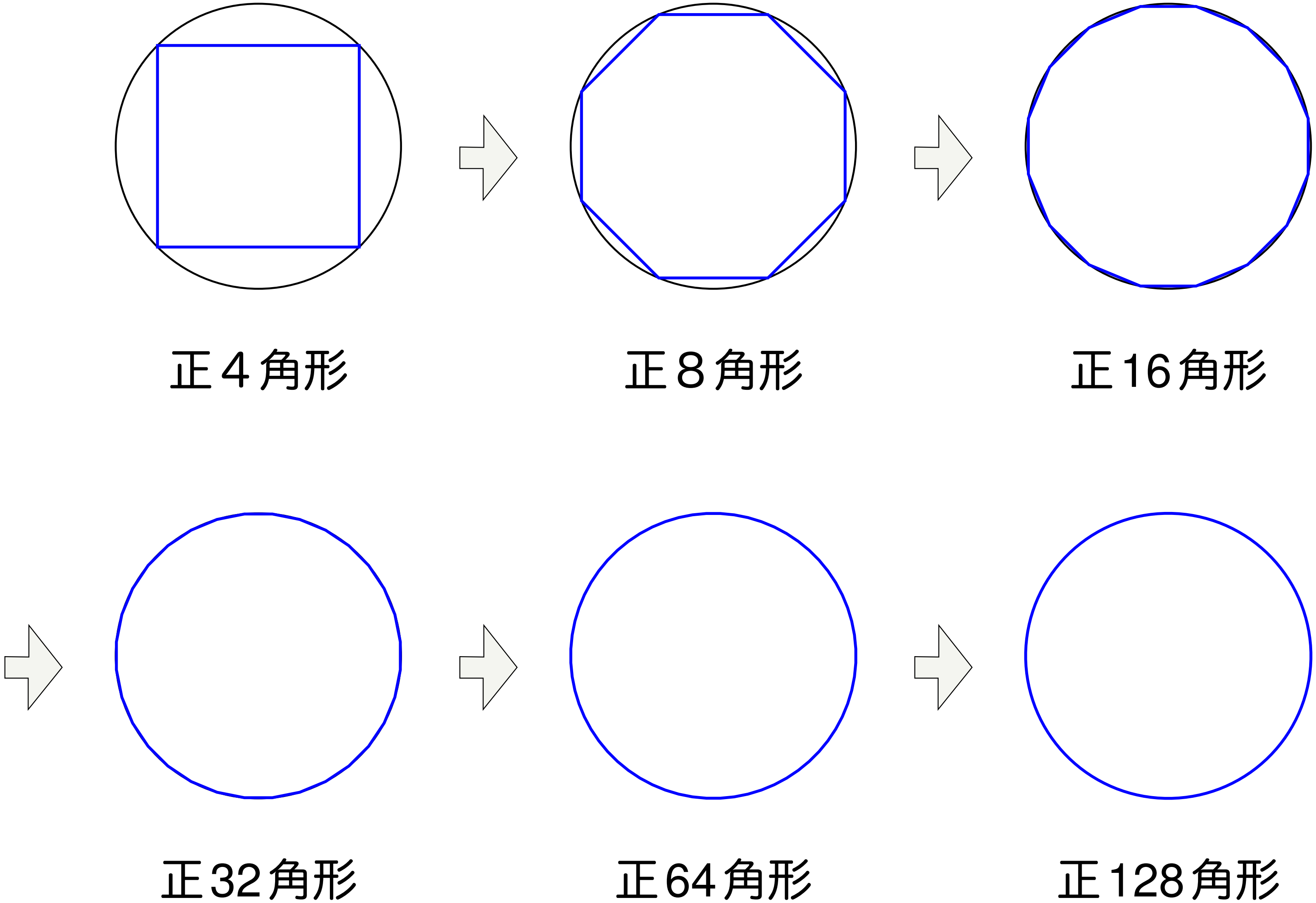
・現代のコンピューター時代

2019年3月14日　31兆4000億桁　Google

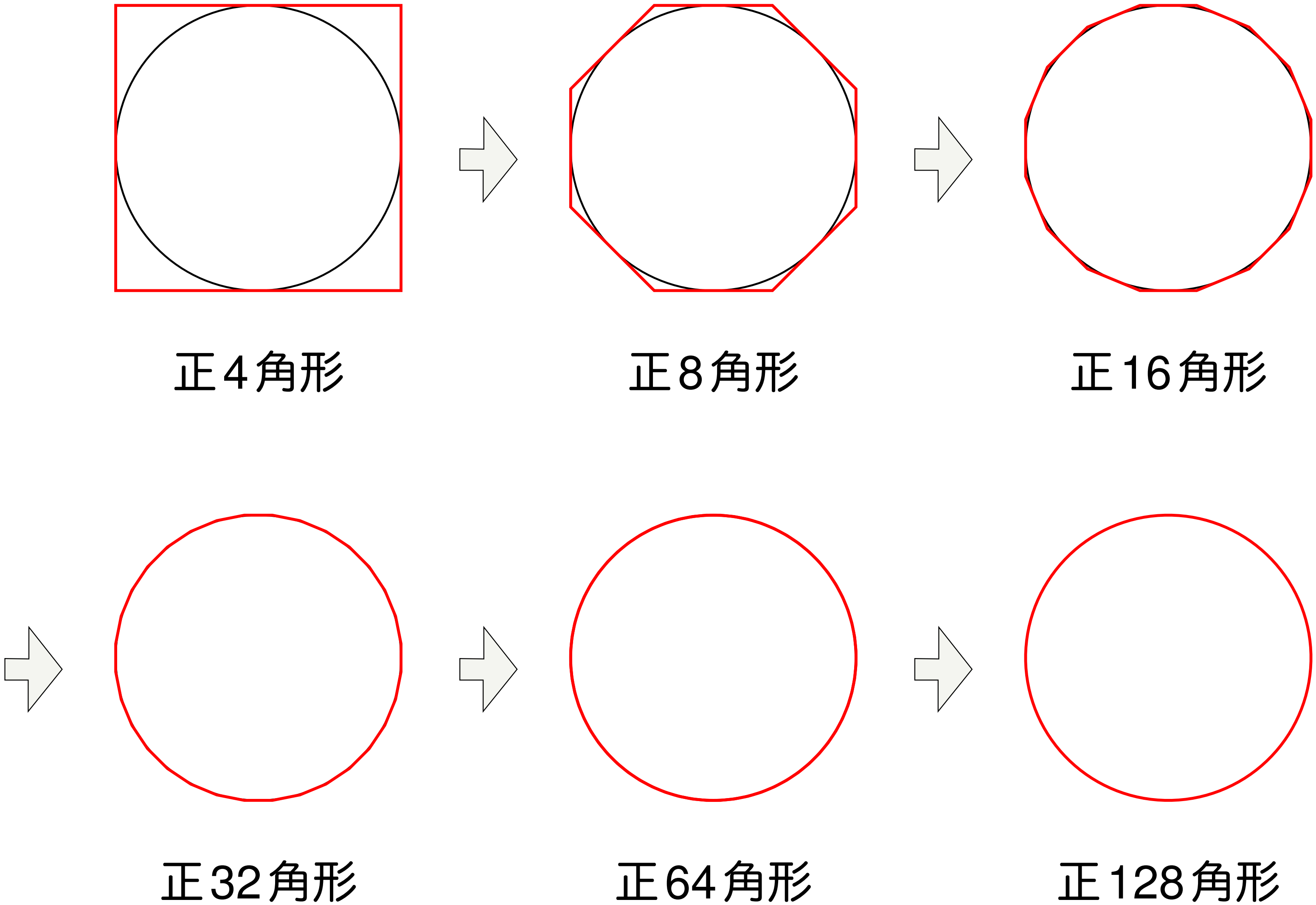
2021年8月16日　62兆8000億桁　グラウビュンデン応用科学大学

2022年6月 8日　100兆桁　Google

内接正多角形による近似値



外接正多角形による近似値



コンピュータでの計算の注意点

１．扱える数値の大きさの限界

例えば，扱える桁数の最小の限界の $s = 0.00000\cdots1$ とする．

このとき，$s \div 2 = 0$ となりエラーにもならない．

２．１０進数と２進数の変換による誤差の発生

例えば，0.1+0.2=0.30000000000000004 となる．

例えば，最近流行りの Python など.

・整数・有理数は正しい数値で扱えるが，小数は２０桁程度.

・もちろん十分すぎるほどの精度である.

・扱える有効桁数を任意に設定できるが，ルートなどの計算の精度は
２０桁程度のまま？

・円周率を求めるには不向き.
そもそも円周率の値を求めることは 実用的ではない！

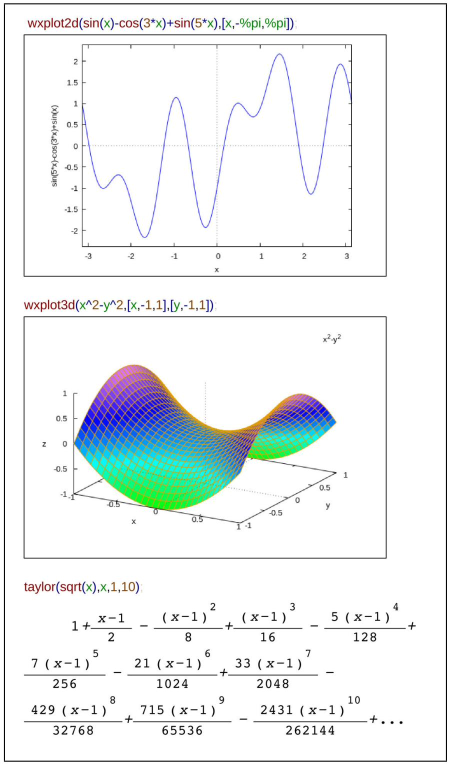
今回は Maxima を利用. [3]

- https://maxima.sourceforge.io/

- 数式処理ソフト

- windows, mac, linux, android など対応.

- フリー！　(いい時代です)



- 有効桁数を任意に決定できる．計算もその精度で実行しているっぽい.

[3]オススメのマニュアル　　梅野善雄『いつでもどこでもスマホで数学！ Maxima on Android 活用マニュアル』森北出版 (2017)

近似値の正確さの測定方法

小数点以下 p 桁（程度）正しいとすると,

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{p+1} \leqq |err| < \left(\frac{1}{10}\right)^{p}$$

$$-(p+1) \leqq \log_{10}|err| < -p$$

$$-\mathrm{floor}(\log_{10}|err|) = p+1$$

∴整数部分 3 と合わせて $(p+1)$ 桁（程度）正しい

例えば, Leibniz の n=1000 では,

val 3.142591654⋯

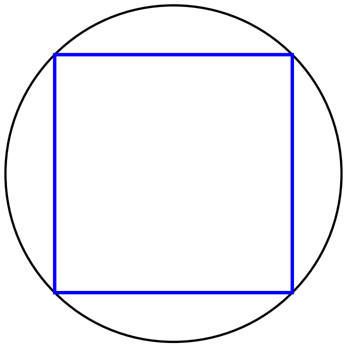
PI　3.141592653⋯

err 0.000999001 → 4 桁　　　となるが, 実際は 3.14 までの 3 桁

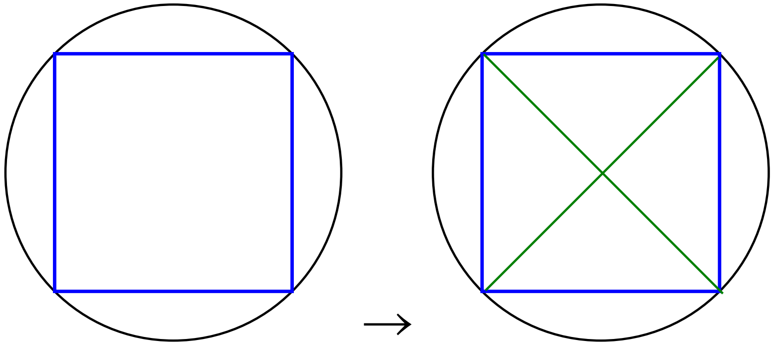
内接多角形で円周率を求める

手順（円の半径を１とする）

1．例えば，$n = 4$ の正方形のとき

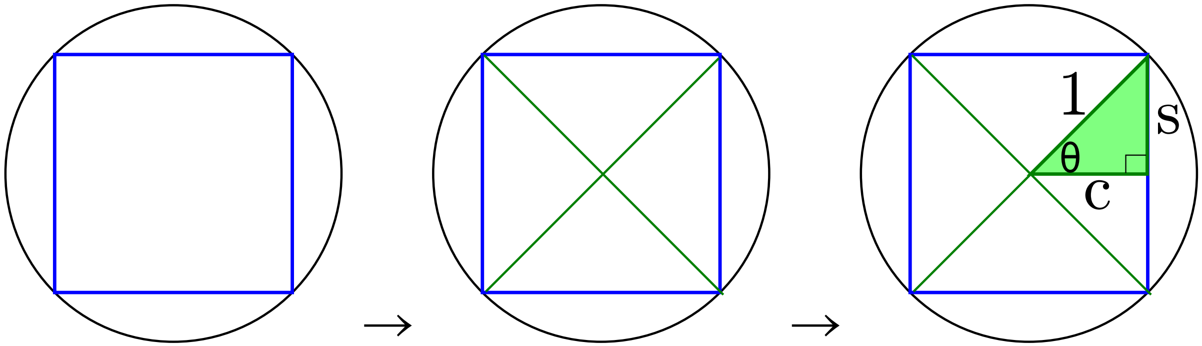


対角線で，$n = 4$ 個の二等辺三角形に分割する



さらに二等辺三角形の頂点から底辺に垂線を下ろして

直角三角形にする



円の半径は 1 なので，斜辺の長さも 1

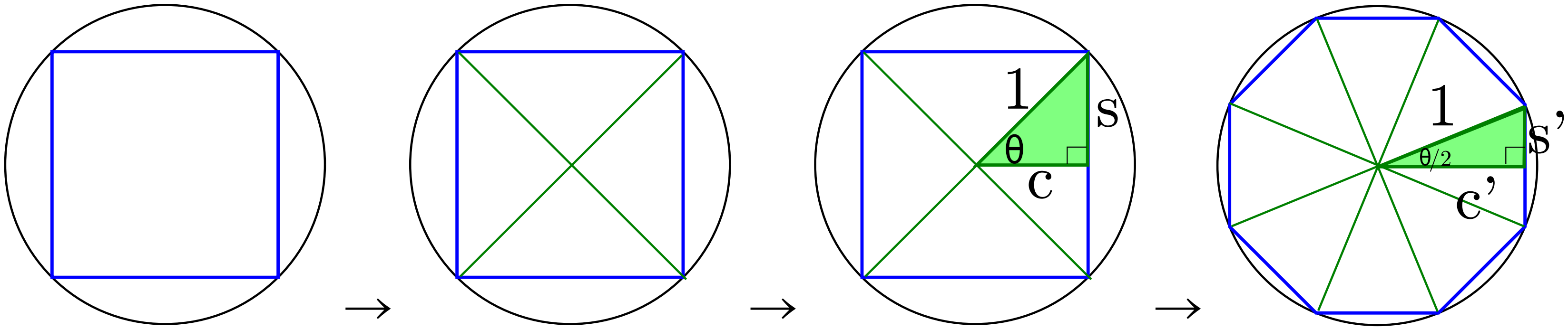
残りの辺の長さと，角度を図のように s, c, θ とおく

$\theta = \dfrac{360^\circ}{2n}$ で，周の長さ l は $l = 2s \times n$

なお，$s = c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2．次に，n を2倍にした　$2n = 8$ の正8角形を考える

同様にして直角三角形を作る

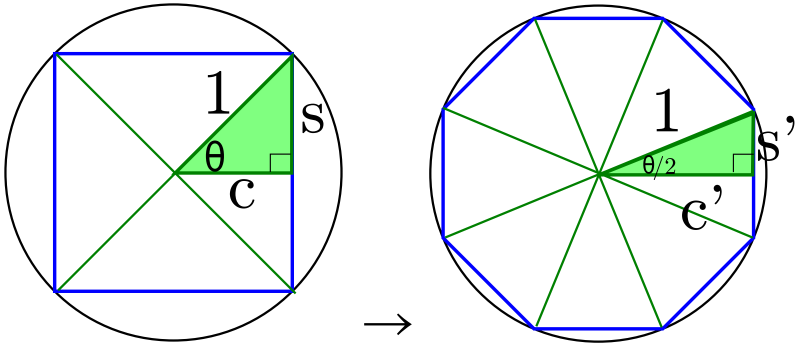


各辺の長さと角は図のように s', c', $\frac{\theta}{2}$

周の長さ l は $l = 2s' \times 2n$

3．n から $2n$ としたとき，s', c' を s, c で表すことを考える.

すると，同様にすることで，$n \to 2n \to 4n \to \cdots$ と n を増やせるので，その周の長さは段々と円周の長さに近づく.



中３で習う三角比（この講座でも説明する）を用いると,

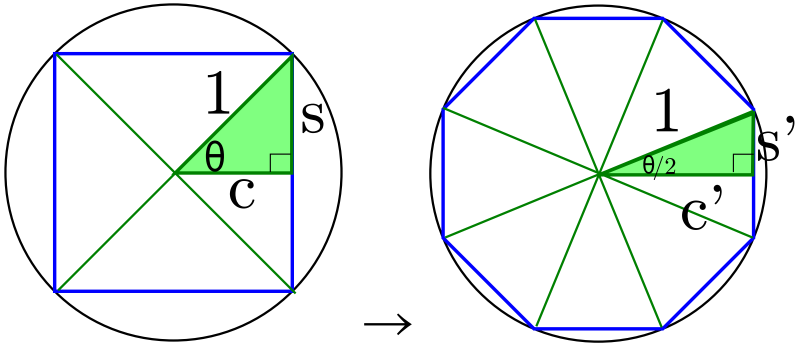
$$s = \sin\theta\ ,\ c = \cos\theta \qquad s' = \sin\frac{\theta}{2}\ ,\ c' = \cos\frac{\theta}{2}$$

と表せて,「半角の公式」などの公式を用いると,

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\,, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

つまり,

$$s' = \sqrt{\frac{1-c}{2}}\,, \quad c' = \sqrt{\frac{1+c}{2}}\ .$$



$$s' = \sqrt{\frac{1-c}{2}}, \quad c' = \sqrt{\frac{1+c}{2}}$$

を用いて,

$n = 4$ のとき, $s = c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ なので, これから順に 8, 16, 32, $\cdots$

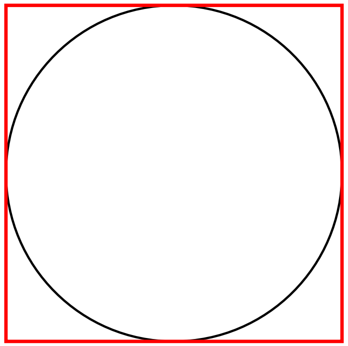
と求めていくことができる.

	内接多角形	外接多角形
8	3.06146745892072	3.31370849898476
16	3.12144515225805	
32	3.13654849054594	
64	3.14033115695475	
128	3.14127725093277	
256	3.1415138011443	
512	3.14157294036709	
1024	3.14158772527716	
2048	3.1415914215112	
4096	3.14159234557012	
8192	3.14159257658487	
16384	3.14159263433856	
32768	3.14159264877699	
65536	3.14159265238659	
131072	3.14159265328899	
262144	3.14159265351459	
524288	3.14159265357099	
1048576	3.14159265358509	

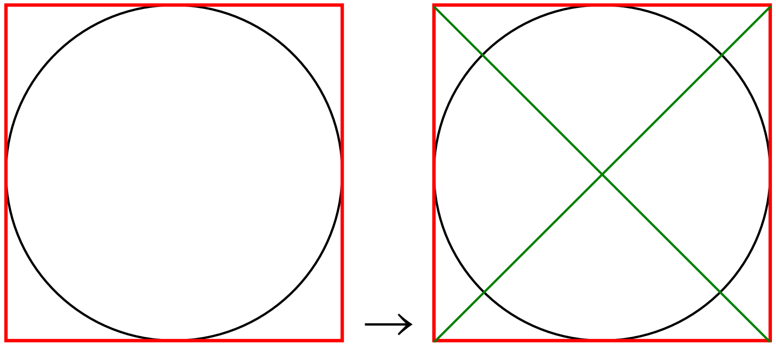
外接多角形で円周率を求める

✻ **手順**（円の半径を１とする）

1．例えば，$n = 4$ の正方形のとき

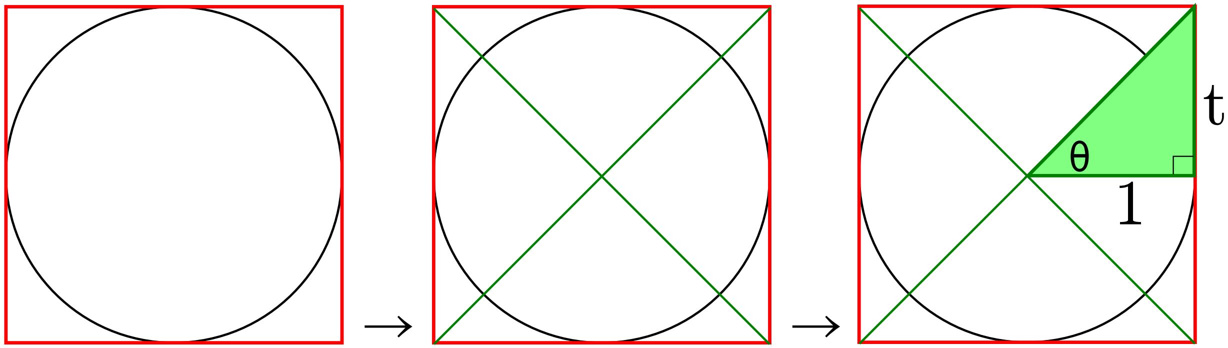


対角線で，$n = 4$ 個の二等辺三角形に分割する



さらに二等辺三角形の頂点から底辺に垂線を下ろして

直角三角形にする



円の半径は 1 なので，底辺の長さも 1

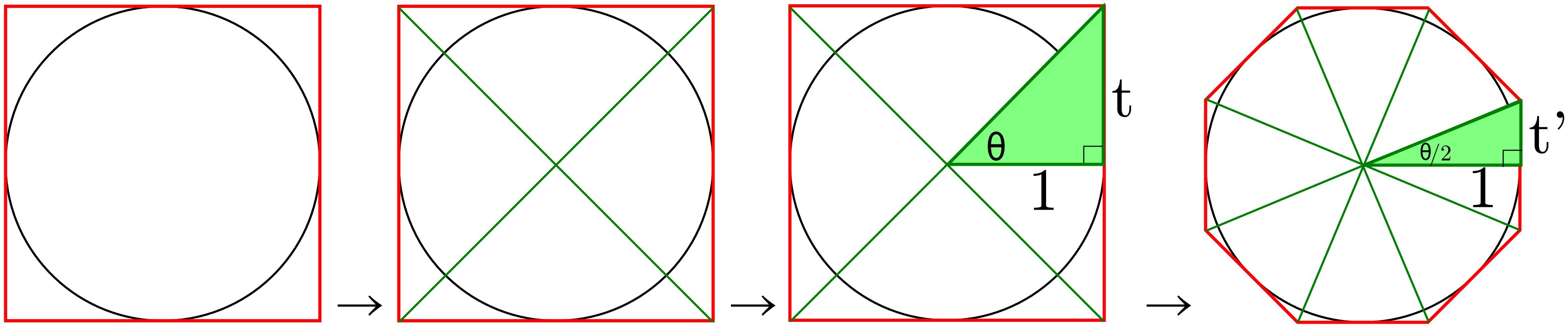
高さと角度を図のように t, θ とおく

$\theta = \dfrac{360^\circ}{2n}$ で，周の長さ l は $l = 2s \times n$

なお，$t = 1$

２．次に，n を２倍にした　$2n = 8$ の正８角形を考える

同様にして直角三角形を作る

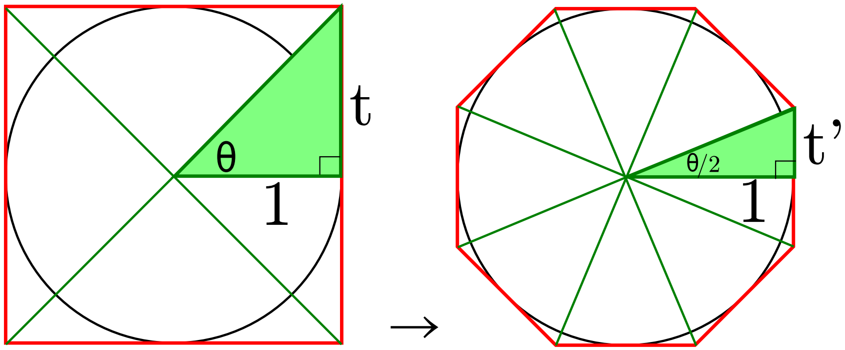


各辺の長さと角は図のように t', $\frac{\theta}{2}$

周の長さ l は $l = 2t' \times 2n$

３．n から $2n$ としたとき，t' を t で表すことを考える．

すると，同様にすることで，$n \to 2n \to 4n \to \cdots$ と n を増やせるので，その周の長さは段々と円周の長さに近づく．



三角比を用いると,

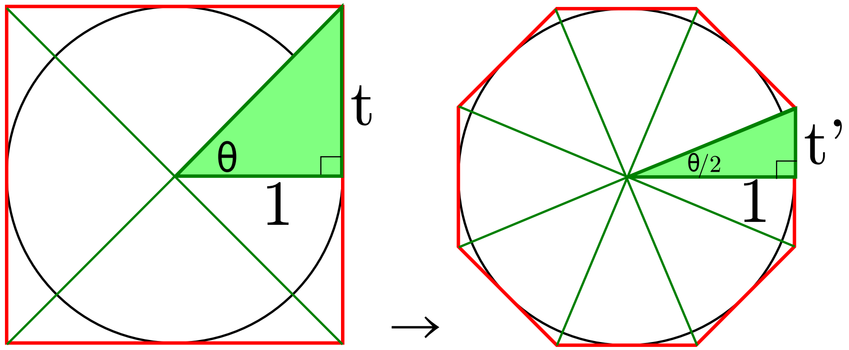
$$\boldsymbol{t = \tan\theta \qquad t' = \tan\frac{\theta}{2}}$$

と表せて，半角の公式を用いると,

$$\boldsymbol{\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{\tan^2\theta + 1} - 1}{\tan\theta}}$$

つまり,

$$\boldsymbol{t' = \frac{\sqrt{t^2 + 1} - 1}{t}}\ .$$



$$t' = \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{t}\,.$$

を用いて,

$n = 4$ のとき, $t = 1$ なので, これから順に $8, 16, 32, \cdots$

と求めていくことができる.

内接多角形の周の長さ < 円周 < 外接多角形の周の長さ　なので,

	内接多角形	外接多角形
8	3.06146745892072	3.31370849898476
16	3.12144515225805	3.18259787807453
32	3.13654849054594	3.15172490742926
64	3.14033115695475	3.1441183852459
128	3.14127725093277	3.14222362994246
256	3.1415138011443	3.14175036916897
512	3.14157294036709	3.14163208070318
1024	3.14158772527716	3.14160251025681
2048	3.1415914215112	3.14159511774959
4096	3.14159234557012	3.14159326962931
8192	3.14159257658487	3.14159280759964
16384	3.14159263433856	3.14159269209225
32768	3.14159264877699	3.14159266321541
65536	3.14159265238659	3.1415926559962
131072	3.14159265328899	3.14159265419139
262144	3.14159265351459	3.14159265374019
524288	3.14159265357099	3.14159265362739
1048576	3.14159265358509	3.14159265359919

π 3.141592653589793

無限和・無限積の公式のための準備

総和記号（Σ）

数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し，そのすべての和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

と書く.

例えば，数列 $\{2k+1\}_{k=1}^{n}$ の総和を考えるときは,

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n+1)$$

となる.

総乗記号（Π）

数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し，そのすべての積

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

と書く.

例えば，数列 $\{2k+1\}_{k=1}^{n}$ の総乗を考えるときは,

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times (2n+1)$$

となる.

階乗（！）

自然数 n において，n から 1 まで順に 1 ずつ減らしたもののすべての積を n の階乗といい $n!$ と書く．つまり，

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots 2 \times 1$$

２重階乗（！！）

自然数 n において，n から 1 あるいは 2 まで順に 2 ずつ減らしたもののすべての積を $n!!$ と書く．つまり，

$$n!! = \begin{cases} n \times (n-2) \times (n-4) \times \cdots 3 \times 1 & (n\text{が奇数}) \\ \\ n \times (n-2) \times (n-4) \times \cdots 4 \times 2 & (n\text{が偶数}) \end{cases}$$

円周率を求める公式

・現実には無限回の計算はできないので,
どこかで計算するのを止めなければならない.
したがって近似値として求まることになるが,
多く計算すれば (パソコンの精度の範囲の中で) よい近似値が得られる.

・それぞれの公式によって収束するスピードには差がある.
直ぐによい近似値が得られるものもあれば,
いくらか計算してもなかなか値に近づかないものもある.

・理論的には，無限回計算すれば，正確な π の値になる.

ヴィエト (Viète) (1593)

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

ウォリス (Wallis) (1655)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdots$$

ニュートン (Newton) (1676)

$$\sin^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$$

より

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{3}{40 \cdot 2^5} + \frac{5}{112 \cdot 2^7} + \cdots$$

グレゴリ (Gregory) (1671)・ライプニッツ (Leibniz) (1673)

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

より

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

マチン (Machin) (1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}$$

$$= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right)$$

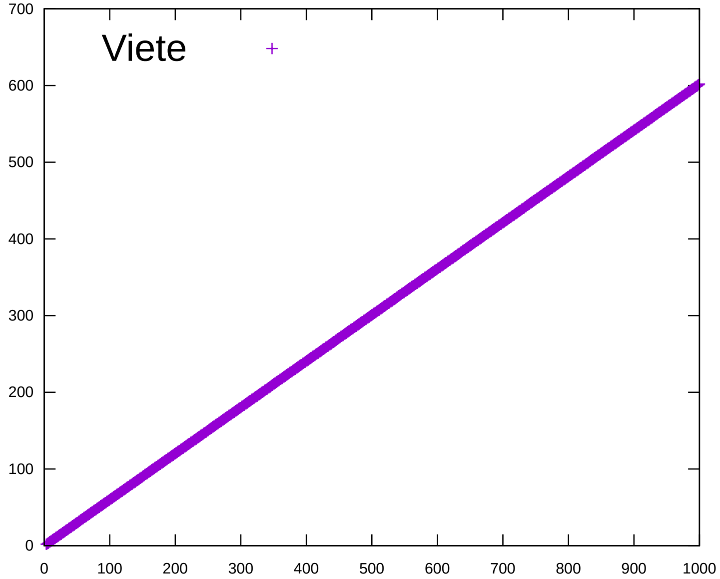
オイラー (Euler) (1735)

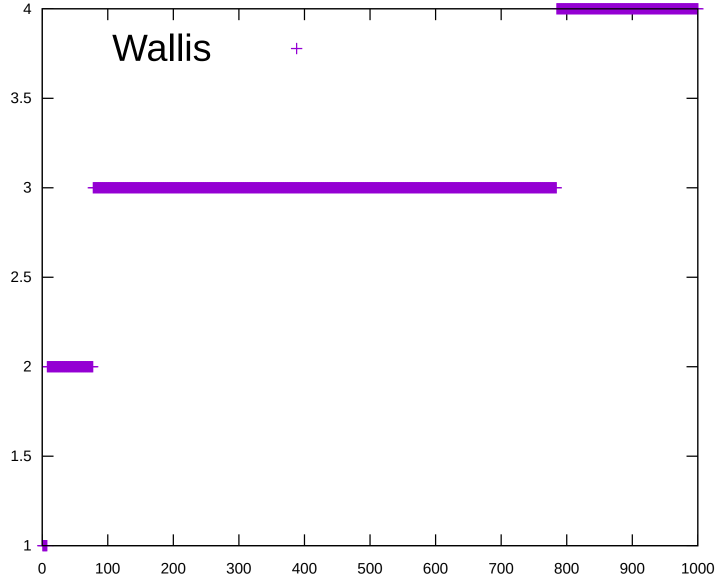
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

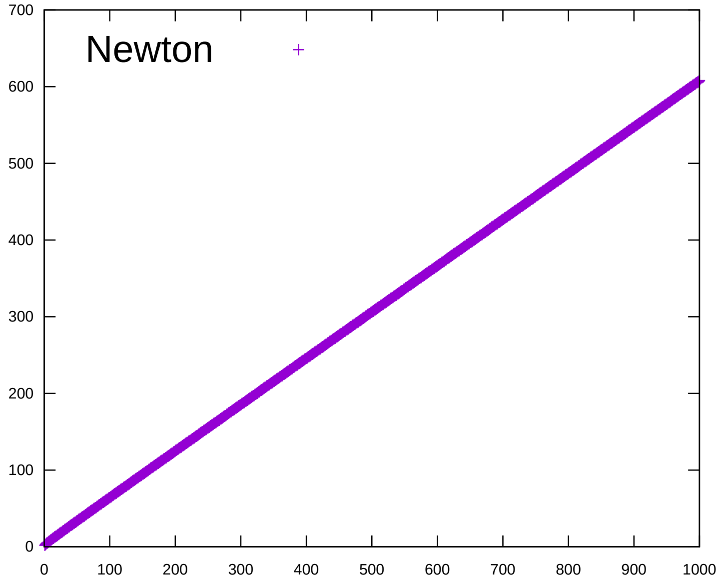
高野喜久雄 (Takano) (1983)

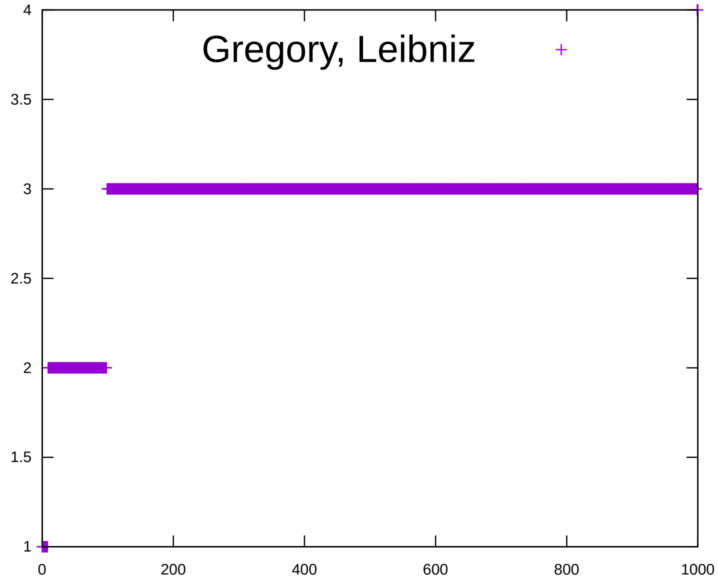
$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 12 \tan^{-1} \frac{1}{49} + 32 \tan^{-1} \frac{1}{57} \\ &\quad - 5 \tan^{-1} \frac{1}{239} + 12 \tan^{-1} \frac{1}{110443} \end{aligned}$$

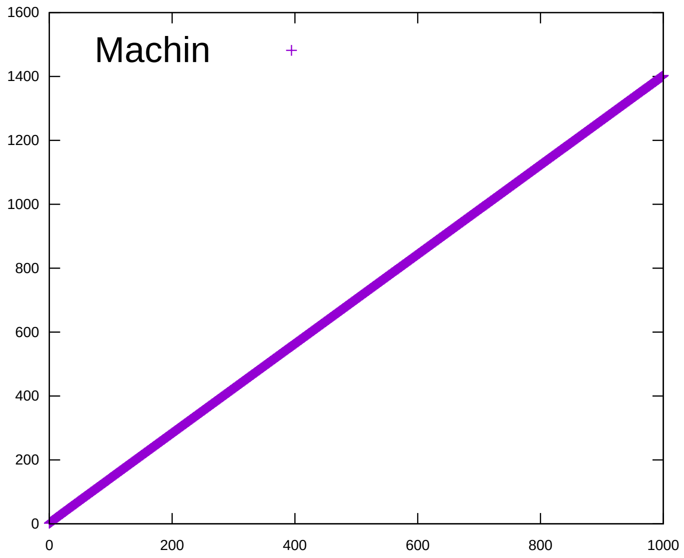
$$\begin{aligned} &= 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{49} \right)^{2n+1} + 32 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{57} \right)^{2n+1} \\ &\quad - 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{239} \right)^{2n+1} + 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{110443} \right)^{2n+1} \end{aligned}$$

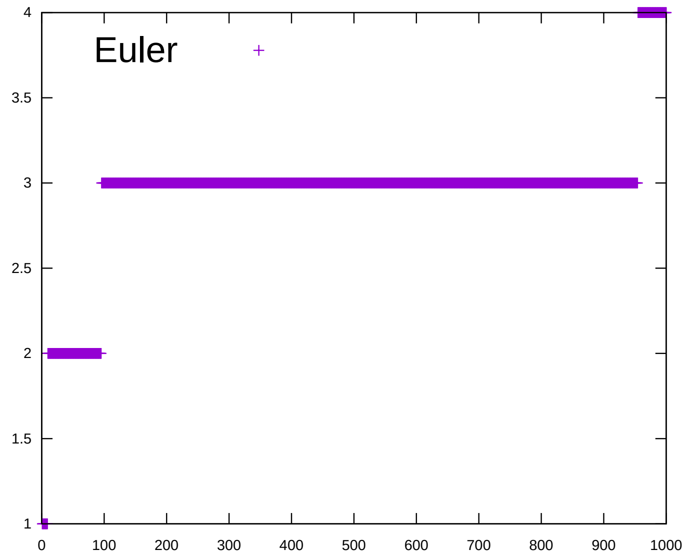

Viete
700
600
500
400
300
200
100
0
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

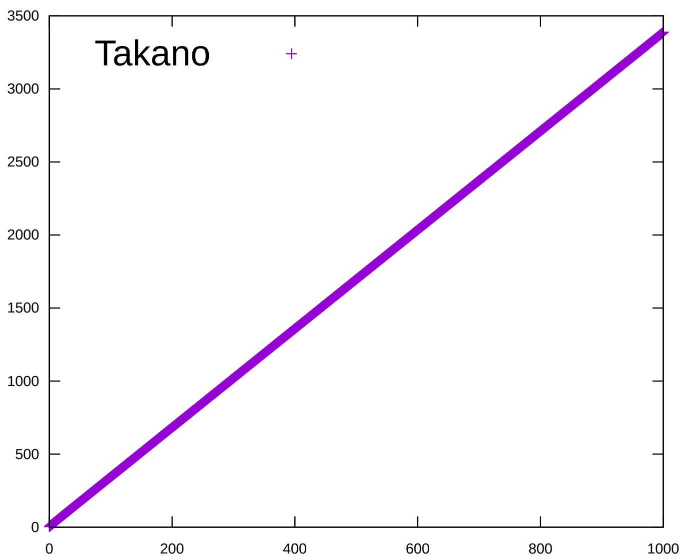

Wallis
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000


Newton
700
600
500
400
300
200
100
0
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000


Gregory, Leibniz
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0 200 400 600 800 1000


Machin
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
200
400
600
800
1000


Euler
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000


Takano
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
200
400
600
800
1000

参考文献・資料など

□ 梅野善雄『いつでもどこでもスマホで数学！ Maxima on Android 活用マニュアル』森北出版 (2017)

オススメのマニュアル．1000 円程度

□ 数学者の画像は『MacTutor』 https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/ による

※ Hippasus のみ wikipedia による

□ ペートル・ベックマン（田尾陽一・清水韶光訳）『π の歴史』蒼樹書房 (1973)，文庫版（ちくま学芸文庫）筑摩書房 (2006)

□ 大野栄一『パソコンで挑む円周率―π の歴史から計算まで』（ブルーバックス）講談社 (1991)

□ 堀場芳数『円周率 π の不思議―アルキメデスからコンピュータまで』（ブルーバックス）講談社 (1989)

□ 柳屋晃『円周率 π の世界－数学を進化させた「魅惑の数」のすべて』（ブルーバックス）講談社 (2021)

□ YEO・エイドリアン（久保儀明・蓮見亮訳）『π と e の話－数の不思議』青土社 (2008)

これは自主教材『円周率 π』小澤嘉康 (2005) の抜粋です

1 付録 1 計算機の使い方

1.1 計算機で計算をするときの注意

普通の計算機（つまり関数電卓ではない計算機のこと）では，$\boxed{\surd}$ とメモリー機能を用いるとき以外は押した順に計算される．通常の計算では乗除が加減に優先されるが，計算機ではそうはならない．

例えば，$1+4\times5$ を計算するとき，$\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ と押すと，まず $1+4$ が計算され 5，それに $\times 5$ で 25 となってしまう．正しく計算するには乗除を先に入力する．つまり，$\boxed{4}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ としなければならない．複雑な計算ではメモリー機能を用いる方法もあるが，基本的には自分で順序を考えながらキーを押す必要がある．

これは，計算機には数値を記憶する場所（メモリーという）が数ヶ所しかないことによる．メモリーが多くあれば通常の式の通り計算できる．実際に関数電卓とよばれる計算機やコンピュータでは乗除が加減に優先されて計算される．

以下，普通の計算機を用いることを前提として話をする．

1.2 キーの機能

数字キー $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{\cdot}$

説明はいらないだろう．押せば順にその数字が入力される．

演算キー $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\surd}$ $\boxed{=}$

計算の結果を表示するには $\boxed{=}$ を押すが，$\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$ でもその時点までの計算結果を表示する．

$\boxed{\surd}$ はそのとき，表示されている数字の平方根 (**??**参照) を先に計算する．

メモリーキー $\boxed{\mathbf{M+}}$ $\boxed{\mathbf{M-}}$ $\boxed{\mathbf{MR}}$ $\boxed{\mathbf{MC}}$

$\boxed{\mathrm{M+}}$ はメモリーの数値に表示されている数値を加える．

$\boxed{\mathrm{M-}}$ はメモリーの数値から表示されている数値を引く．

$\boxed{\mathrm{MR}}$ メモリーの数値を表示する．

$\boxed{\mathrm{MC}}$ メモリーの数値を消去する（0 にする）．

ほとんどの計算機ではメモリーに数値があるとき (0 でないとき) は，画面の端に M と表示される．

$\boxed{\mathrm{MR}}$ $\boxed{\mathrm{MC}}$ の代わりに $\boxed{\mathrm{MRC}}$ となっているものもある．このときは，$\boxed{\mathrm{MRC}}$ を 1 回押すと $\boxed{\mathrm{MR}}$ として，$\boxed{\mathrm{MRC}}$ を 2 回続けて押すと $\boxed{\mathrm{MC}}$ として働く．また，$\boxed{\mathrm{MC}}$ が $\boxed{\mathrm{CM}}$ となっているものもある．

クリアーキー：$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$

$\boxed{\text{C}}$ は表示している数値を消去する．メモリーにある数値は消去しない．
$\boxed{\text{AC}}$ は表示している数値とメモリー内の数値のすべてを消去する．

$\boxed{\text{C}}$ が $\boxed{\text{CE}}$ となっているものもある．また $\boxed{\text{AC}}$ のないものは $\boxed{\text{C}}$ と $\boxed{\text{MC}}$ を順に押すと良い．

1.3 便利な計算方法

ここでは，累乗計算，逆数計算，繰り返し計算の操作方法について述べる．ただ，メーカーによってこれらの計算の操作方法には違いがあり，大きく次の２つのタイプがある．

	タイプ１	タイプ２
メーカー	カシオ	カシオ以外
累乗計算 例 5^2 5^3 ⋮ 5^n	$\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ⋮ $\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ のあと $\boxed{=}$ を $(n-1)$ 回押す 注：5^2 だけなら $\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ でも計算できる	$\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ⋮ $\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ のあと $\boxed{=}$ を $(n-1)$ 回押す
逆数計算 例 $1\div 5$ $1\div 5\div 5$ ⋮ $1\div 5^n$	$\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ⋮ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ のあと $\boxed{=}$ を $(n+1)$ 回押す 注：$\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ では $5\div 5$ で 1 となる	$\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ⋮ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ のあと $\boxed{=}$ を n 回押す
繰り返し 例 $2+3+3$ 例 $2+3+3+3$ ⋮ 例 $2+3\times n$	$\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{+}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{+}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ⋮ $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{+}$ $\boxed{2}$ のあと $\boxed{=}$ を n 回押す 注： 先に繰り返す数を押す	$\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ⋮ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ のあと $\boxed{=}$ を n 回押す

例 $2-3-3$ 例 $2-3-3-3$ $\vdots$ 例 $2-3\times n$	$\boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\vdots$ $\boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{2}$ のあと $\boxed{=}$ を n 回押す 注： 先に繰り返す数を押す	$\boxed{2}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\boxed{2}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\vdots$ $\boxed{2}\ \boxed{-}\ \boxed{3}$ のあと $\boxed{=}$ を n 回押す
例 $2\times 3\times 3$ 例 $2\times 3\times 3\times 3$ $\vdots$ 例 2×3^n	$\boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\vdots$ $\boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}$ のあと $\boxed{=}$ を n 回押す 注： 先に繰り返す数を押す	$\boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\vdots$ $\boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}$ のあと $\boxed{=}$ を n 回押す 注： 先に繰り返す数を押す
例 $2\div 3\div 3$ 例 $2\div 3\div 3\div 3$ $\vdots$ 例 $2\div 3^n$	$\boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\vdots$ $\boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}$ のあと $\boxed{=}$ を n 回押す 注： 先に繰り返す数を押す	$\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ $\vdots$ $\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}$ のあと $\boxed{=}$ を n 回押す
備考	繰り返し計算では，式とキーを押す順序が逆になることに注意せよ．	繰り返しの**掛け算**のみ，式とキーを押す順序が逆になるので注意せよ．

$\boxed{=}$ を押す度にそこまでの計算結果が表示されるので，どのような計算をしているのか感じがつかめると思う．

注意　タイプ２では $\boxed{+}\ \boxed{-}\ \boxed{\times}\ \boxed{\div}$ をタイプ１のように２度押してもよい．これより，以下では，特に支障がない限りタイプ１の計算法で述べていく．

1.4　計算機・コンピューターの限界

ここでは計算機の限界について触れる．原理的にはコンピュータでも同じである．

計算機では，表示される桁数は普通８桁，多くても１２桁である．以下表示桁数が８桁として話をする．

<u>小さい数について</u>

計算機で表示されない数字はどのように扱われているのだろうか．それを確かめてみるには次の計算をしてみればよい．

$$\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$$

つまり，$1\div3\times3$ を計算する．答えは当然 1 であるはずだが，表示されているのは 0.99999999 である．なぜこのような結果になるのか．それは $1\div3$ が割り切れないことにある．$1\div3=0.3333333\cdots$ のようにいつまでも 3 が続く．最後の「$\cdots$」がそれを意味している．ところが計算機では「$\cdots$」はない．表示されない 9 桁目以降の数字は，表示**できない**のではなくそもそも**無い**のである．計算機にとっては $1\div3$ の $0.3333333\cdots$ もただ単に押した 0.3333333 も同じ 0.3333333 でしかない．

このように無限に続く数を扱う場合，どんなに性能の良いコンピューターであっても扱える桁数は有限なので，特別なプログラムを用いない限り，同じ現象が起きる．

さらに詳しく，9 桁目以降の数字が無くなるときどのような処理がなされているのかも確認してみよう．つまり，四捨五入しているのか，切り捨てているのかということである．それには次の計算をしてみる．

$$\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{6}\ \boxed{=}$$

$1\div6=0.1666666\cdots$ なので，0.1666667 と表示されれば四捨五入であり，0.1666666 と表示されれば切り捨てをしていることになる．おそらく多くの計算機では切り捨ての 0.1666666 と表示されるだろう．このエラーを**丸め誤差**という．

例題　次の計算を実際にしてみよ．
$0.0000001\div2$（8 桁表示の場合．１０桁，１２桁表示では最後の桁のみ 1 とする）

答　（多くの計算機では）単に 0 と表示される．

このエラーを**情報落ち**という．

注意　円周率の近似値を求めていく過程で小さい値を扱うのであるが，計算機ではこのような計算が行われていることを常に意識しなければならない．特に (小さい数) $\times$ (大きい数) を計算する場合，小さい数が 0 となってしまってはそれ以降の計算は意味が無くなる．

大きい数について

大きい数はどのように扱われているのだろうか．それを確かめてみるには次の計算をしてみればよい．

$$\boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{+}\ \boxed{1}$$

$99999999+1$ である．結果は 100000000 となることは直ぐにわかるが，この数字は 9 桁である．ほとんどの計算機では，1.0000000 と表示され，よく見ると端に E も表示されているだろう．この E はエラー（error）を表しており，計算機が計算を処理できなくなったことを表している．ただ，表示できる 8 桁については計算しており上から 8 桁までの計算結果は表示されている．このとき小数点は 8 桁目と 9 桁目の境目，つまり億の位を表す．（同様に１２桁の計算機では兆の位となる．）

例題　次の計算を実際にしてみよ．
40000000×3

答　${}^{\mathrm{E}}1.2000000$

このエラーを**桁あふれ**あるいは**オーバフロー**という.

注意　オーバフローの場合 E が表示されその後キー入力ができなくなるので，結果が正しくないことに気が付くのだが，情報落ちの場合エラー表示がされずしかも続けてキー入力ができるので，より一層の注意が必要である.

1.5　練習

次の計算を計算機でしてみよ.

(1) $2 \times \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11}$

（$\cdot$ は $\times$ を表す．オーバーフローに注意．ウォリスの公式）

解説：実際に計算すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{353894400}{108056025} = \;& 3.\dot{2}751010413348075685738023400361062698725036387374049711 71 \\
& 2049374387036724699062361400023737686075348413010750673088 3 \\
& 3542599776366010132243898477664711430945197178963412729646 4 \\
& 9588026211402834779458156081532704909328285951662575039198 4 \\
& 1582179244516906854569192231529893867556205218542880880543 2 \\
& 1820555586789353023119256885490651724417958184191950425716 6 \\
& 5948289324912701536078159454782831406208029584652961276337 8 \\
& 99714523091146467769844393221016597639974263350886\dot{7}
\end{aligned}
$$

であるが，８桁の計算機では，分子も分母もオーバーフローになる．そこで，分子分母を交互に計算していくことになるが，その順序によって結果が異なる.

$2 \times 2 \div 1 \times 2 \div 3 \times 4 \div 3 \times 4 \div 5 \cdots \times 10 \div 11 \times 12 \div 11$ のように交互に行うと，3.2751003 となる.（６桁）

$2 \times 2 \times 2 \times 4 \cdots \times 8 \times 10 \div 1 \div 3 \div 3 \cdots \div 11 \div 11 \times 10 \times 12$ のようにオーバーフローになる直前で交代すると 3.2751 となる.（５桁）きれいに割り切れたように見えるが，途中で生じた丸め誤差のあと $\times 10 \times 12$ をしたためである.

$1 \div 3 \div 3 \cdots \div 9 \div 11 \times 2 \times 2 \times 4 \cdots \times 10 \times 12 \div 11$ のように情報落ちで 0 になる直前で交代すると 3.2172218 となる.（２桁）

$2 \times 2 \times 2 \cdots \times 6 \times 6 \div 1 \div 3 \cdots \div 5 \div 5 \times 8 \times 8 \cdots \times 12 \div 7 \div 7 \cdots \div 11$ のように（理由はないが）真ん中あたりで区切って計算すると 3.2751008 となる.（６桁）

(2) $\dfrac{1+0.5}{2}$

（順序に注意）

解説：計算機は押した順に計算するので，$\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ で 1.25.

(3) $\sqrt{\dfrac{1-0.5}{2}}$

（ $\boxed{\sqrt{}}$ を押す前に $\boxed{=}$ を押すのを忘れないこと）

解説：四則演算は押した順に計算するが $\boxed{\sqrt{}}$ は表示されている数値のルートを計算するので，$\boxed{\sqrt{}}$ を押す前にそれまでの結果を表示させなければならない．また，$\boxed{\sqrt{}}$ の直前には $\boxed{=}$ を押すが $\boxed{\sqrt{}}$ ば直ぐ結果を表示するので最後の $\boxed{=}$ は押す必要はない．$\boxed{1}$ $\boxed{-}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$ で 0.5.

(4) $3+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15}}$

（逆数計算をうまく用いよ．ランベルトの連分数の公式）

解説：表示されている数の逆数を求めるには，単に $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ と押せばよい．$\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ で 3.1415094.

この繁分数は簡単にすると，$\frac{333}{106}$ であるので，正確には $3.1\dot{4}15094339622\dot{6}$ である．

(5) $4\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}\right)$

（メモリー機能を有効に．もし難しければ紙にメモを取りながらゆっくりと．グレゴリー・ライプニッツの公式）

解説：メモリーが空になっていることを確認してから計算をはじめる．$\boxed{1}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M−}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M−}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{9}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ で 3.3396828.

(6) $\dfrac{2}{\sqrt{0.5}\sqrt{0.5+0.5\sqrt{0.5}}}$

（ $\boxed{\sqrt{}}$ の計算のタイミングを利用する．ヴィエートの公式）

解説：$\boxed{\sqrt{}}$ は表示されている数のルートを計算し直ぐに表示することを利用する．$\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ で 3.0614682.

(7) $\dfrac{2}{\sqrt{0.5}\sqrt{0.5+0.5\sqrt{0.5}}\sqrt{0.5+0.5\sqrt{0.5+0.5\sqrt{0.5}}}}$

（$\boxed{\sqrt{\ }}$ の計算のタイミングとメモリー機能をうまく利用する．ヴィエートの公式）

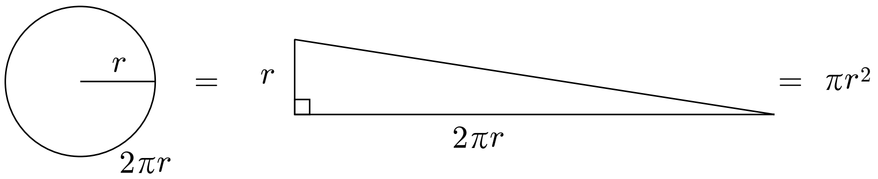
解説：分母の第２因数の $\sqrt{0.5+0.5\sqrt{0.5}}$ が２回出てくるのでこの値をメモリーに記憶させるとよい．$\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\mathrm{M+}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\mathrm{MR}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ で 3.1214464.

2　付録２　円の面積の求め方について

円の面積を求めるには，(半径)$^2 \times$ (円周率) を計算すればよいことは知っているが，なぜこの公式で求まるのかの説明はできるであろうか．なお円周の長さと直径の長さの比を円周率と定義したので，円周の長さが (直径) $\times$ (円周率) であることは，単なる定義の言い換えである．

ここではアルキメデスが『円の計測』で述べた証明法を紹介する．

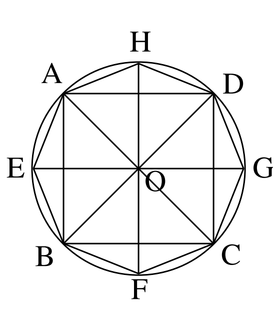
命題　円の面積は，直角をはさむ２辺の長さが円の半径と円周の長さに等しい直角三角形の面積に等しい．



証明　円の面積を S，直角三角形の面積を K とおく．証明すべきは $S=K$ であるがこれを背理法で示す．つまり $S \neq K$ を仮定して矛盾を導く．

(1) $S > K$ とする．

図のように，円に内接する正方形 ABCD を考え，次にこの正方形の 4 つの頂点を共有し円に内接する正８角形 AEBFCGDH を考える．



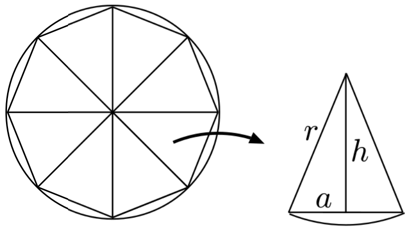
明らかに，$S >$ (正８角形 AEBFCGDH) $>$ (正方形 ABCD) である．

次にこの正８角形の８つの頂点を共有し円に内接する正 16 角形を考える．以下同様に内接正 32 角形，内接正 64 角形，$\cdots$，内接正 $4 \cdot 2^n$ 角形を考えていく．明らかに，

$$S > (\text{正 } 4 \cdot 2^n \text{ 角形}) > \cdots > (\text{正 32 角形}) > (\text{正 16 角形}) > (\text{正８角形}) > (\text{正方形})$$

であり，n を十分大きくとればいくらでも正 $4 \cdot 2^n$ 角形の面積を円の面積に近づけることができる．したがって，ある正の整数 N において，$n \geqq N$ ならば必ず $S > (\text{正 } 4 \cdot 2^n \text{ 角形}) > K$ となるような N が存在することがわかる．$\cdots$ ①

一方，正 $4 \cdot 2^n$ 角形に注目する（図は正８角形）．円の中心と各頂点を結ぶことで正 $4 \cdot 2^n$ 角形は $4 \cdot 2^n$ 個の二等辺三角形に分割することができる．



この二等辺三角形の等しい２辺は円の半径の長さ r に等しい．高さを h とすると $h < r$ である．また底辺の長さを a とすると a は切り取られる弧の長さより短いので $a < \dfrac{\text{円周}}{4 \cdot 2^n} = \dfrac{2\pi r}{4 \cdot 2^n}$ である． よって二等辺三角形の面積 $\dfrac{ah}{2}$ において，

$$\frac{ah}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{4 \cdot 2^2} \cdot r\,,$$

が成り立つので，正 $4 \cdot 2^n$ 角形の面積においては，

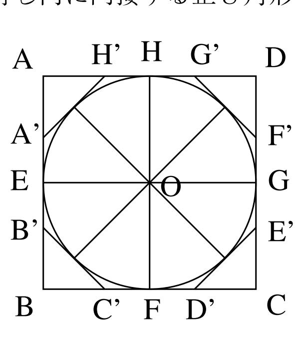
$$\text{正 } 4 \cdot 2^n \text{ 角形の面積} = 4 \cdot 2^n \times \frac{ah}{2} < 4 \cdot 2^n \times \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{4 \cdot 2^2} \cdot r = \pi r^2 = K\,,$$

となり，$(\text{正 } 4 \cdot 2^n \text{ 角形}) < K$ であることがわかる．$\cdots$ ②

まとめると，①では $(\text{正 } 4 \cdot 2^n \text{ 角形}) > K$，②では $(\text{正 } 4 \cdot 2^n \text{ 角形}) < K$ となり明らかに矛盾している．したがって $S > K$ はあり得ないことがわかった．

(2) $S < K$ とする．

図のように，円に外接する正方形 ABCD を考え，円と正方形 ABCD の４つの接点を E, F, G, H とおく．次にこの４つの接点を共有し円に内接する正８角形 A′B′C′D′E′F′G′H′ を考える．



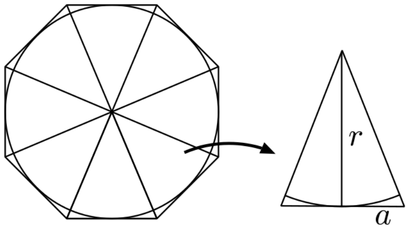
明らかに，$S <$ (正８角形 $\mathrm{A'B'C'D'E'F'G'H'}$) $<$ (正方形 ABCD) である．

次に円とこの正８角形の８つの接点を共有し円に内接する正 16 角形を考える．以下同様に内接正 32 角形，内接正 64 角形，$\cdots$，内接正 $4 \cdot 2^n$ 角形を考えていく．明らかに，

$$S < (\text{正 } 4 \cdot 2^n \text{ 角形}) < \cdots < (\text{正 } 32 \text{ 角形}) < (\text{正 } 16 \text{ 角形}) < (\text{正８角形}) < (\text{正方形})$$

であり，n を十分大きくとればいくらでも正 $4 \cdot 2^n$ 角形の面積を円の面積に近づけることができる．したがって，ある正の整数 N において，$n \geqq N$ ならば必ず $S <$ (正 $4 \cdot 2^n$ 角形) $< K$ となるような N が存在することがわかる．$\cdots$ ①

一方，正 $4 \cdot 2^n$ 角形に注目する（図は正８角形）．円の中心と各頂点を結ぶことで正 $4 \cdot 2^n$ 角形は $4 \cdot 2^n$ 個の二等辺三角形に分割することができる．



この二等辺三角形の高さは円の半径の長さ r に等しい．また底辺の長さを a とすると a は切り取られる弧の長さより長いので $a > \dfrac{\text{円周}}{4 \cdot 2^n} = \dfrac{2\pi r}{4 \cdot 2^n}$ である． よって二等辺三角形の面積 $\dfrac{ar}{2}$ において，

$$\frac{ar}{2} > \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{4 \cdot 2^2} \cdot r\,,$$

が成り立つので，正 $4 \cdot 2^n$ 角形の面積においては，

$$\text{正 } 4 \cdot 2^n \text{ 角形の面積} = 4 \cdot 2^n \times \frac{ar}{2} > 4 \cdot 2^n \times \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{4 \cdot 2^2} \cdot r = \pi r^2 = K\,,$$

となり，(正 $4 \cdot 2^n$ 角形) $> K$ であることがわかる．$\cdots$ ②

まとめると，①では (正 $4 \cdot 2^n$ 角形) $< K$，②では (正 $4 \cdot 2^n$ 角形) $> K$ となり明らかに矛盾している．したがって $S < K$ はあり得ないことがわかった．

(1), (2) より $S > K$ でも $S < K$ でもないので結局 $S = K$ であることが証明される． $\square$