海城生に聞きました
～数学，ここがわからない～

◆ 立方体の面を塗り分ける問題の解法が納得いかない．

◆ 特性方程式の解を利用して漸化式を変形できるのはなぜか．

◆ 三角関数の合成，なぜそうなるのかがわからない

◆ ベクトルの内積が何を表しているか分からない．
形式的には解けるが，解いた気がしない．

◆ e の定義は？ e は何の役に立つのか？ なぜ e^x は微分しても変化しないのか．

◆ 必要条件，十分条件の区別の仕方がわからない．

◆ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ の公式の導出方法がわからない。

◆ $\dfrac{dy^2}{dx} = 2y\dfrac{dy}{dx}$ となる理由がわからない．

◆ 背理法の使い方はわかるが，それで証明されているのには違和感がある．（その１）

◆ 背理法の使い方はわかるが，それで証明されているのには違和感がある．（その２）

◆ 重複組合せがよく分からない．

◆ 放物線 $y = ax^2$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線の方程式がなぜ $y = a(x-p)^2 + q$ になるのでしょうか．

◆ 解と係数の関係（２次，３次）の成立理由がわからない

◆ 点と直線の距離の公式が導けない

◆ 三角形の面積公式 $S = \dfrac{|ad-bc|}{2}$ の証明がわからない

◆ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+4x-1}{2x^2-3}=3$ となる見当がつけられない。

◆ x 切片が a，y 切片が b の直線はなぜ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ となるのか。

◆ 実数係数の方程式が虚数解をもつとき、その共役な複素数も解であるのはなぜか。

◆ 円順列は何で $(n-1)!$ になるのか？

◆ 積和，和積の成立する理由が不明，どうやって覚えるか.

◆ 真数はなぜ正なのか．負のときの値はどうなるのか.

海城生に答えます　～答えの一案～

A. Mo.

◆ 立方体の面を塗り分ける問題の解法が納得いかない．

回答

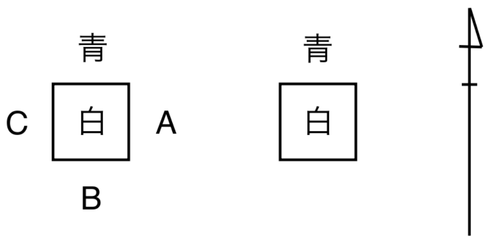
「異なる6色 (赤・白・青・緑・黄・紫) をすべて用いて立方体の面を塗り分ける方法は何通りあるか.」という問題に対しての質問だと思います．計算式としては「$5 \times (4-1)! = 30$ 通り」，説明としては,「下面の色を1つ決めると，上面の色は5通りあり，側面は残り4色の円順列となるので」という解答が一般的です．しかし，これで納得してもらうことは実際はなかなか難しいです．

6面を塗り分けた立方体がたくさん地面にばらまかれているとしましょう (10000個くらいあれば十分でしょうか?)．全く同じものをはじいていき，最終的に異なるものが何種類あるのかを知りたいのですが，向きがまちまちなので近くにある2つの立方体が同じものかどうかは瞬時には判別できません．皆さんならどう判別しますか?これを生徒に聞くと，1つの決まった色が下になるようにしてみる，という答えが自然に返ってきます．

そこで例えば，**すべての立方体の赤い面を下に**してみましょう．すると，赤は見えなくなり，見えるのは残り5色 (白・青・緑・黄・紫) です．赤い面はこれ以降ずっと伏せたままにしておきます．

上面の色はさまざまですが，白・青・緑・黄・紫の5種類があります．上面の色が違えば，それらは即，異なる立体と判定できます．

では，上面の色が同じであればどうでしょう．ここでは，下面が赤，上面が白である2つの立体を考えましょう．立体を真上から見ると，どちらも手前に白が見え，向こうに赤が隠れています．側面は残り4色 (青・緑・黄・紫) です．これらが同じかどうかを判別したいとき，2つの立体を並べて，1つの面 (例えば，青い面) の方向を (北向きに) 揃えるとよいでしょう．



そして，A，B，Cの色の並びが同じかどうかをチェックし，これも全く同じであれば，全く同一の立方体と判定できます．

逆に言えば，上面が白であるようなすべての立方体 (もちろん下面は赤です) は，上の手順に従って分類でき，結局A，B，Cの順列の数，つまり $3!=6$ 種類あることになります．上面は他の色の可能性もあわせて，5種類あるので，異なる種類の立方体は $5 \times 3! = 30$ 通りとなります．

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　　　　　　　A. Mo.

◆ 特性方程式の解を利用して漸化式を変形できるのはなぜか.

回答

特性方程式の解を利用して漸化式を変形する，とは，2 項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ (p, q は 0 でない定数，さらに p は 1 でない) において，α についての 1 次方程式 $\alpha = p\alpha + q$ (これが特性方程式) をつくり，ここから得られた α の値を用いて， $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形するというものです.

a_{n+1} と a_n は違うものであるにもかかわらず，同じ α に置きかえてしまってよいのか，というような素朴な疑問です.

漸化式 $a_{n+1} = 3a_n + 4$ は，$a_{n+1} + 8 = 3(a_n + 4)$，$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$，$a_{n+1} - 1 = 3(a_n + 1)$ など，いろいろ変形できますが，**役に立つ変形は**， $a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$ **だけ**です.

それは $\boxed{a_{n+1} + 2} = 3\left(\boxed{a_n + 2}\right)$ のように，両辺にあるパーツが揃っているから (n を機械的に $n+1$ に置き換えたものだから) です．というわけで，

$$a_{n+1} = pa_n + q \ldots (\text{ア}) \quad が， \quad a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \ldots (\text{イ})$$

の形に変形できたら便利ですが，
(イ) は， $a_{n+1} = pa_n - a\alpha + \alpha$ と同じなので，
$-\alpha p + \alpha$ の部分が q と一致すれば OK です．そんな **α を見つければよいだけ** なのです....
が，これを見直してみると， $-\alpha p + \alpha = q$ ，すなわち， $\alpha = p\alpha + q \ldots (\text{ウ})$ と同じですから，これをみたす α を見つければよいということで**も**あります.

これは**たまたま** $a_{n+1} = pa_n + q$ の a_{n+1}，a_n を両方 α に置き換えたものに**も**なっています.

だから，**簡易的**に a_{n+1}，a_n を両方 α に置き換えたものをつくり，それをみたす α を用いると，

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \ldots (\text{イ})$$

の形に変形でき，数列 $\{a_n - \alpha\}$ が公比 p の等比数列であることがわかります.

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　D. T.

◆ 三角関数の合成，なぜそうなるのかがわからない

回答

まず，この合成公式が「何の役に立つ」のかわからないと，親しみも有難みもわきませんよね．実はこの「三角関数の合成」，ホントに素晴らしい道具なのです．

◇ どう役に立つのかというと…

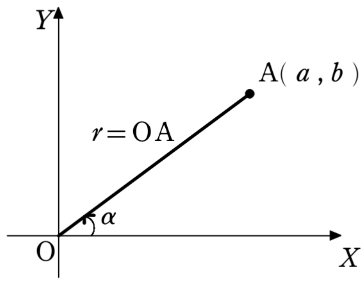
２次関数 $y = x^2 - 4x + 8$ の最大値・最小値 を扱うときを思い出して下さい．変数 x を 1 か所に閉じ込める平方完成が役に立ちましたよね．

$$y = (x-2)^2 + 4 \qquad \text{よって } x = 2 \text{ のとき 最小値 } 4$$

これと同様に，三角関数の合成公式も $\boxed{\text{変数 } x \text{ を 1 か所に閉じ込める役割}}$ をしてくれて，これが有り難いのです．$\sin x$ と $\cos x$ の 1 次式 $a\sin x + b\cos x$ は $r\sin(x+\alpha)$ のようにまとめることができるのです．

◇ 三角関数の合成公式を（有難みを感じながら）導いてみましょう．

一般に，$a\sin x + b\cos x$ (a, b は正負いずれでもよく，少なくとも一方は 0 でない) が与えられたとき，XY 座標平面上に点 A(a, b) をとります．



OA $= r (= \sqrt{a^2+b^2} > 0)$，

動径 OA の角 を α とすると，

三角関数の定義から

$a = r\cos\alpha,\ b = r\sin\alpha$

$\therefore a\sin x + b\cos x$

$\quad = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$

$\quad = r(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha)$

（←この形を何とか作りたくて，細工をしてきたのです！）

三角関数の加法定理により次の結果が得られ,「三角関数の合成公式」とよばれます．

$$\boxed{a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)}$$

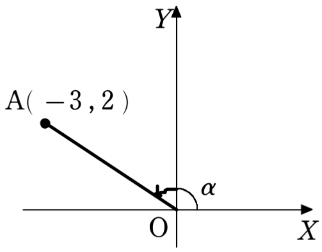
$$\text{ただし}\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

◇ では，実際にこの公式を用いてみて，有難みを味わってみましょう！

（例題）　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき， 関数 $f(x) = 2\cos x - 3\sin x$ の最大値・最小値を求めよ.

（解）XY 座標平面上に右図のように点 $\mathrm{A}(-3, 2)$ をとり，

OA の X 軸の正の向きとなす角を α とする.



$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

すなわち　$-3 = \sqrt{13}\cos\alpha,\ 2 = \sqrt{13}\sin\alpha$

このことから

$$f(x) = \sqrt{13}(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha) = \sqrt{13}\sin(x+\alpha)$$

α は一定値であるから，$0 \leqq x < 2\pi$ における $f(x)$ の

最大値は $\sqrt{13}$，最小値は $-\sqrt{13}$ ……（答）

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　　　M. K.

◆ ベクトルの内積が何を表しているか分からない．
　形式的には解けるが，解いた気がしない．

回答

　なるほど．よく出される質問です．数ある図形の諸定理のなかで，“ ピタゴラスの定理 ”

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \quad \cdots \text{①}$$

が最も重要な定理のひとつであることは納得できますね．

　そして，この大定理を含んでしまう定理があるのです．それは，“ 余弦定理 ”

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \cdots \text{②}$$

です．これはなぜでしょうか？そうです，②で $\cos\theta = 0$ とすれば①となるからです．

　では今，①と②を見比べてみましょう．②において，$\cos\theta$ の値が 0 になれば①がでてくるわけですから，

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ は重要な量

であるといえます．**“ 重要な量であれば新たな呼び名と記号が与えられて当然 ”** といえます．そこで，先人たちはこの量を“ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との内積 ”とよび，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ という記号で表すことにしました．つまりは，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

というわけです．

通常，$\times$ も $\cdot$ で表すので紛らわしいです．内積を表す記号が他のものならよかったのに…

　そんな嘆きをしばしば耳にします．なるほどごもっともな意見です．とはいうものの，今さら記号を変えるわけにもいきません．ここは先人たちに敬意を表しておきましょう．

　ここで，

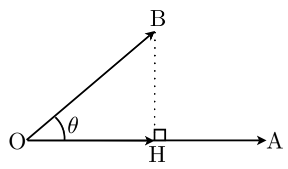
$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ が具体的に「何を表すのか？」

が分かれば内積がしっくりくるのではないでしょうか．

　そこで，右図を見てください．

　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{h}$ とし，$\angle\mathrm{BOA} = \theta$ として，

　三角比における $\cos\theta$ の定義を思い出すと，



$$\cos\theta = \frac{|\vec{h}|}{|\vec{b}|}$$

　ですから，両辺に $|\vec{b}|$ を掛ければ，

$$|\vec{h}| = |\vec{b}|\cos\theta \ \cdots \text{③}$$

となるので，結局，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{h}|$$

となります．

すなわち，標語的に言えば，

“ 内積とは２つの線分の長さの積である ”

といえるのです．

以上をまとめてみましょう．ベクトルの内積とは，

余弦定理がピタゴラスの定理になるかどうかのカギを握る量（の半分のマイナス）のことで，それはつまるところ

２つの線分の長さの積

を表すのだ，というわけです．ベクトルの内積がしっくりきたでしょうか．

では，最後にひとつだけ注意をしてこの回答を終えることにします．③をみてください．

当然，θ が鈍角であれば，$\cos\theta$ の値は負になります．

長さ（大きさ）なのに負というのはどうも気持ちがよくない

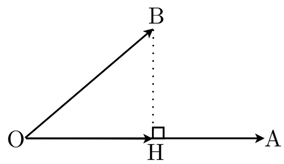
と思われるかもしれませんが，こういった事情から，$|\vec{h}|$ は，いわば

“ 符号付きの長さ ”

であり，長さ（大きさ）ではあるものの負の値も許すものとします．

ではベクトルの内積の意味の理解を深めるために練習問題をひとつやってみましょう．

（問）下の図で，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．



（答）$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{h}$ とします．ベクトルは “ 大きさ ” と “ 向き ” で決まるので，$\vec{h}=|\vec{h}|\times\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ として，スタートしましょう：

$$\begin{aligned}\vec{h} &= |\vec{h}|\times\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\\ &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\times\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\\ &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\end{aligned}$$

【ひとこと】

$\vec{h}$ と $\vec{a}$ は平行なので，$\vec{h}$ は $\vec{a}$ の何倍かで表されることはすぐに分かりますね．すなわち，$\vec{h}=k\vec{a}$ となるような k が存在するというわけです．そして，その倍率 k は，$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$ であるということをこの結果は意味しているといえます．また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が鈍角の場合でも，$\vec{h}=-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ とはならず，$|\vec{h}|$ が “ 符号付きの長さ ” ゆえ，$\vec{h}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ になります．

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　T. S.

◆ e の定義は？e は何の役に立つのか？なぜ e^x は微分しても変化しないのか.

回答

《 e の定義 》

e の定義を式で覚えようとすると忘れてしまうので，最初はイメージで覚えましょう.

e の定義（こっちを覚える）　$y=a^x$ 上の点 $(0,\,1)$ における接線の傾きが 1 になるときの a の値を e と定める.

上で書いたことを式にすると，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{(0+h)}-e^0}{h}=1$　つまり，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ ということです. h がものすごく小さいならば，$\dfrac{e^h-1}{h}\fallingdotseq 1$ と考えることができ，これを式変形すると $e\fallingdotseq(h+1)^{\frac{1}{h}}$ となります.

e の定義（こっちは無理に覚えてなくても思い出せる）　$e=\displaystyle\lim_{h\to 0}(h+1)^{\frac{1}{h}}$

e の定義は他にも表し方がありますが，上のことを覚えていればすべて導けます.

《 e^x と $\log_e x$ の微分 》

導関数の定義に従って微分してみます.

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}\\
&= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} \qquad (e \text{ の定義により，この lim の部分は 1 です})\\
&= e^x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\log_e x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_e\left(\frac{x+h}{x}\right)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)\\
&= \frac{1}{x}\log_e\left\{\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\left(\frac{h}{x}+1\right)^{\frac{x}{h}}\right\} \qquad (e \text{ の定義により，この lim の部分は } e \text{ です})\\
&= \frac{1}{x}\log_e e\\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

《 e の有用性 》

私たちの願いは,「どんな指数関数，対数関数でも微分したい」ということです.

a が正の数のとき，指数関数 a^x を微分したいと思います．$y = a^x$ の両辺に関して底を e として対数をとると，$\log_e y = \log_e a^x = x \log_e a$ であり，この両辺を x に関して微分します.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y} y' &= \log_e a \\
y' &= y \log_e a \\
\therefore (a^x)' &= a^x \log_e a
\end{aligned}
$$

となり，e を使うことで指数関数 a^x の微分ができます.

a が正の数のとき，対数関数 $\log_a x$ を微分してみると，

$$
\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \left(\frac{\log_e x}{\log_e a} \right)' \text{（底を } e \text{ にそろえる）} \\
&= \frac{1}{\log_e a} (\log_e x)' \\
&= \frac{1}{x \log_e a}
\end{aligned}
$$

となり，e を使うことで対数関数 $\log_a x$ の微分ができます.

ところが，e を知らなかったとして，定義に従って微分しようとすると，

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} \\
&= a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}
\end{aligned}
$$

ここまできて，極限がわからず先に進めません．対数関数に関しても同じようにうまくいきません．つまり，e という特別な数に関する指数関数，対数関数を知ることで，どんな指数関数，対数関数も解析することが可能となるのです．e は有用だと思えてきましたか？

海城生に答えます　～答えの一案～　　Y. K.

◆ 必要条件，十分条件の区別の仕方がわからない.

回答

『$ab=0$ は,「$a=0$ かつ $b=0$ である」ための必要条件，十分条件のどちらですか』というような問題で,「必要」なのか「十分」なのかをどのように判断していいのかわからないというような質問だと思います。

この問題では，次のような２つの数 a, b についての２つの命題

① 「$ab=0$ である」ならば「$a=0$ かつ $b=0$ である」

② 「$a=0$ かつ $b=0$ である」ならば「$ab=0$ である」

を考えると，①はすべての数 a, b について正しいとはいえないが，②はすべての数 a, b について正しいので,

「$ab=0$」は,「$a=0$ かつ $b=0$ である」ための必要条件であるが，十分条件でない。

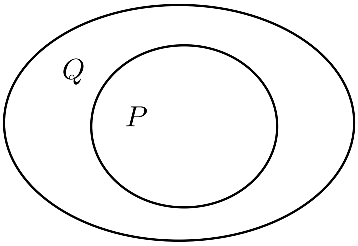
という判断をします。

「 $a=0$ かつ $b=2$」のときは「 $a=0$ かつ $b=0$ である」は正しくないが,「$ab=0$」は正しいので，①が正しくないような２つの数 a, b があります。このような例を反例といいます。

「p ならば q」が正しいとき，　p は q であるための十分条件であり，
q は p であるための必要条件である。

と教科書や参考書には書いてあります。次のような集合の図を使って

$P \subset Q$



Q：必要条件

P：十分条件

と説明することもよくあります。q が p から導かれるとき，命題 p を満たすものの集合 P は,命題 q を満たすものの集合 Q に含まれると考えます。しかし，この説明では「具体的なイメージがわかない」という質問を受けることがあります。

教科書などでは，例として「$x=3$ ならば $x^2=9$」は正しいが,「$x^2=9$ ならば $x=3$」は正しくないので,「$x=3$ は $x^2=9$ であるための十分条件であるが必要条件でない」と説明しています。

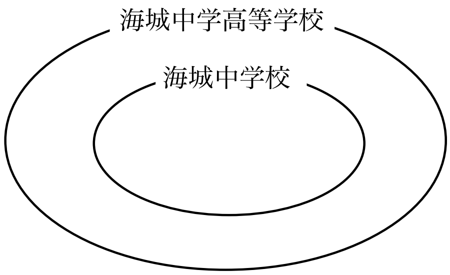
そして「$x=3$ ならば $x^2=9$ であることは十分に成り立つ」とか「$x^2=9$ であることは $x=3$ であるために必要である」とか説明するのですが，日常生活でそんな表現はしないので，わかりにくいのかもしれません。

そこで，こんな例を考えてみました。

（例）　海城中学高等学校の生徒であることは，海城中学校の生徒であるための**必要条件**であるが**十分条件**でない。

（理由）　海城高校の生徒も海城中学高等学校の生徒であるので，海城中学校の生徒であるとは限りません。

したがって,「海城中学高等学校の生徒であること」は「海城中学校の生徒である」ために**必要な条件**ではありますが，それだけでは**十分ではありません**。



それでは,「海城中学高等学校の生徒であること」以外にどんな条件をつけ加えれば,「海城中学校の生徒であること」になるでしょう。

簡単な方法は,「中学生である」という条件を加えればいいでしょう。

「海城中学高等学校の生徒であり，かつ中学生であること」が正しければ,「海城高校の生徒」ではないので,「海城中学校の生徒である」ことになります。

つまり,「海城中学高等学校の生徒であり，かつ中学生であること」は「海城中学校の生徒である」ための十分条件になります。しかも，

③　「海城中学校の生徒である」ならば「海城中学高等学校の生徒である」

④　「海城中学校の生徒である」ならば「中学生である」

という２つの命題③，④も正しいので，

⑤　「海城中学校の生徒である」ならば「海城中学高等学校の生徒であり，かつ中学生である」

という命題⑤も正しいことがわかります。

したがって,「海城中学高等学校の生徒であり，かつ中学生である」ことは「海城中学校の生徒である」ための必要条件にも十分条件にもなっています。

このように，必要条件でも十分条件でもあることを「**必要十分条件**である」といいます。つまり,「海城中学高等学校の生徒であり，かつ中学生である」ことは「海城中学校の生徒である」ための**必要十分条件**であることになります。

他にも身近な例で，必要条件や十分条件になる例があると思います。数学では，

$$ab = 0 \quad \text{や} \quad x = 3 \quad \text{や} \quad x + 2 > 7$$

などの等式や不等式に置き換えたり，

「△ABC は正三角形である。」

などの幾何の命題に書き換えたりして考えていますが,「p ならば q」という形の推論（結論を導く方法）は理科・社会・国語などいろいろな教科でも使います。

海城生に答えます　〜答えの一案〜 H. H.

◆ $\sum_{k=1}^{n} k^2$，$\sum_{k=1}^{n} k^3$ の公式の導出方法がわからない。

回答

公式は覚えていても導出方法は忘れてしまっていることがよくあります。累乗の和の公式 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ も，教科書にきちんと書かれています。

始めに，$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ $\cdots$ ① であることは既にわかっているものとします。(等差数列の和です)

まず，$S = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ を求めます。
恒等式 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ を用います。
この式に，$k = 1, 2, \cdots, n$ を順に代入して，

$$\begin{aligned} \cancel{2^3} - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ \cancel{3^3} - \cancel{2^3} &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ &\cdots \\ (n+1)^3 - \cancel{n^3} &= 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{aligned}$$

これらの n 個の等式を辺々加えると，
$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n$
① を代入して
$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$
S について解いていけば
$3S = (n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n = \frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2 - 3n - 2\} = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$
$S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \cdots$ ② が得られます。

次に，$S = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ を求めます。
恒等式 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ を用いて同様にして，

$$\begin{aligned} \cancel{2^4} - 1^4 &= 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\ \cancel{3^4} - \cancel{2^4} &= 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\ &\cdots \\ (n+1)^4 - \cancel{n^4} &= 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 \end{aligned}$$

辺々を加えて ①, ② を代入すると
$(n+1)^4 - 1 = 4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 4(1 + 2 + \cdots + n) + n$

$(n+1)^4-1=4S+6\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)+n$
$4S=(n+1)^4-1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$
$=n^2(n+1)^2$ より
$S=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が得られます。

公式を導くために，なぜ恒等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ が出てくるのか疑問を感じるかもしれませんが,「先人達の試行錯誤により獲得したアイデアもしくは先見性」と考えて下さい。要は「うまくいくから使っている」わけです。(この手のやり方は数学で結構あります) それでも何となくすっきりしない人のために，視覚的に三角形状に並べた数の和を使って 2 乗の和の公式を導く方法を紹介します。

1 段目には 1 が 1 個，2 段目には 2 が 2 個，3 段目には 3 が 3 個，$\cdots$，n 段目には n が n 個となるように三角形状に数を並べます。この三角形に並んでいる数の個数は $1+2+\cdots+n$ 個，数の総和は $S=1^2+2^2+\cdots+n^2$ です。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 2 & & & \\
 & & 3 & & 3 & & 3 & & \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
n & & n & & \cdots & & n & & n
\end{array}
$$

この三角形を $120°, 240°$ 回転させた三角形をつくり，3 つの三角形で同じ場所にある 3 つの数をそれぞれ足すと，和はすべての場所で $2n+1$ になります。

$$
+\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n & & & & \\
 & & & n & & \cdots & & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & 3 & & \\
 & n & & \cdots & & 3 & & 2 & \\
n & & \cdots & & 3 & & 2 & & 1
\end{array}
\qquad
+\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n & & & & \\
 & & & \cdots & & n & & & \\
 & & 3 & & \cdots & & \cdots & & \\
 & 2 & & 3 & & \cdots & & n & \\
1 & & 2 & & 3 & & \cdots & & n
\end{array}
$$

したがって次の等式が成り立ち公式が導かれます。
$3S=(2n+1)(1+2+\cdots+n)$
$S=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　K. S.

◆ $\dfrac{dy^2}{dx} = 2y\dfrac{dy}{dx}$ となる理由がわからない.

回答

これは「合成関数の微分」です. まず, $z = y^2$ とおきます. このとき

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dz}{dx} \quad \cdots \quad ①$$

合成関数の微分を用いると

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \cdots \quad ②$$

ここで, $\dfrac{dz}{dy}$ は「z を y で微分する」すなわち「y^2 を y で微分する」ことを表しています.
つまり

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}y^2 = 2y \quad \cdots \quad ③$$

①, ②, ③より

$$\frac{dy^2}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

が成り立ちます.

○ **注意点** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ 等との区別を明確にしましょう.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ですから, y を x で 2 回微分したもの (第 2 次導関数) です.

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ は $\dfrac{dy}{dx}$ を 2 乗したもの, つまり, y を x で微分して, それを 2 乗したものです.

○ **本題の類題を考えてみましょう**.

問 $\dfrac{d}{dx}\left(2\cos^2\dfrac{y}{2}\right) = -\sin y \cdot \dfrac{dy}{dx}$ を示しなさい.

$z = \dfrac{y}{2}$,　$u = \cos z$,　$v = 2u^2$ とおくと

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(2\cos^2\frac{y}{2}\right) &= \frac{dv}{dx} \\
&= \frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \\
&= \frac{d}{du}2u^2\cdot\frac{d}{dz}\cos z\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{2}\right)\cdot\frac{dy}{dx} \\
&= 4u\cdot(-\sin z)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dx} \\
&= 4\cos z\cdot(-\sin\frac{y}{2})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dx} \\
&= 4\cos\frac{y}{2}\cdot(-\sin\frac{y}{2})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dx} \\
&= -2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}\cdot\frac{dy}{dx} \\
&= -\sin y\cdot\frac{dy}{dx}
\end{aligned}$$

■

海城生に答えます　～答えの一案～

A. Mi.

◆ 背理法の使い方はわかるが, それで証明されているのには違和感がある.

回答

ここでは, 「背理法という論法はなぜ正しいのか」ということに焦点を絞って話をしていきます.

ある命題を証明するときに, 直接証明せずにそれと同値な命題を考えて, もとの命題を証明する方法を**間接証明**といいます. 背理法は間接証明の代表的なものです.

数学的対象について, 論理記号や演算記号を用いて記述された文章を**数学的命題**といいます. 例えば, 「$3 < 5$」や「$\triangle$ABC において, AB $=$ AC である」などは数学的命題になります.

数学的命題 P について,

> 「 P である」とその否定「 P でない」のいずれか一方だけが成り立ち, それらがともに成り立つことはないという原理を**排中律**といいます.

これは言い換えると, ある命題 P の否定の否定は, もとの命題 P になることを意味しています. 排中律は一見すると当たり前に思える原理ですが,

「4 以上のすべての偶数は 2 つの素数の和で表すことができる」

のように少し考えただけでは真か偽かわからない命題に対しても, どちらかしかありえないんだと仮定しているのがこの排中律です.

背理法を用いることができるのは, 数学的命題がこの排中律を満たすときだけですが, 数学ではふつう排中律を認めて話を進めていきます.

教科書を見てみると,

「その命題が成り立たないと仮定すると, 矛盾が生じる.
したがって, その命題は成り立たなければならない.」

とする論法がある. このような論法を**背理法**というとあります. ある命題 P の否定を仮定すると矛盾が生じる. つまり, 「 P でないことはない」ということなので, 排中律より「 P である」ことがわかるわけです.

ちなみに, ある命題 A と A の否定がともに真であるとき, それを**矛盾**といいます. 例えば, 「 n は偶数である」かつ「 n は奇数である」というのは矛盾です. これらは同時に成り立つことはありえません.

また, 数学でよく出てくる命題「p ならば q である」の否定は「p かつ q でない」となります. これが否定になるというのも, わかりにくくする要因の一つかもしれません. これは, 論理を少し勉強する必要があります. したがって,

命題「p ならば q である」を背理法を用いて証明するときは,
「p かつ q でない」と仮定して矛盾を導けばよい

ことになります．すなわち, 結論を否定して矛盾を導けばよいのです．
今までみたように, **背理法が納得できない**理由としては,

- そもそも背理法という論法がなぜ正しいのかわからない
- 矛盾とはどういうことなのかわからない
- 命題の否定をつくることができない
- 命題を直接証明しているわけではないので, 直感が働きにくい

などさまざまなことが考えられます．それだけ難しいものなのです．しかし, 背理法はとても強力な論法です．なぜならば, **示したい命題の結論が 1 つであっても, その否定から導かれる矛盾はいろいろある**からです．いろいろあるうちの 1 つを示すほうがアプローチしやすいのです．多くの問題を通じて理解を深めていく必要があります．最後に有名な例をみて回答を終えたいと思います．

問. 素数は無数に存在することを証明せよ．
この問題はユークリッドにより, 鮮やかな証明が与えられています．

証明. 素数が有限個しかないと仮定して矛盾を導く．素数が有限個しかない, すなわち,

$$p_1,\quad p_2,\quad p_3,\quad \cdots,\quad p_n$$

の n 個しかないと仮定する．いま, N として,

$$N = p_1p_2p_3\cdots p_n + 1$$

という数を考えると, N は $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ のどの素数でも割り切れないので, 合成数ではない．N が素数であるとすると, いま, 素数は $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ の n 個しか存在しないと仮定したので, これは矛盾である．
したがって, 素数は無数に存在する． □

ここでは,

- 素数は無数に存在する
- 素数は無数に存在しない, つまり, 有限個しかない

のどちらかしかありえない (排中律) という前提のもと, 証明が行われています．

海城生に答えます　〜答えの一案〜　M. Mu.

◆ 背理法の使い方はわかるが，それで証明されているのには違和感がある．

回答

背理法は今一しっくりとこない人は，まず次の二つの場合を考えてみてください．

［１］容器Ａと容器Ｂに異なる白い粉が入っている．
何が入っているのかわからないので容器Ａの粉を舐めてみたら甘かった．

［２］塩と砂糖が容器Ａと容器Ｂに入っていることがわかっている．
どっちがどっちだかはわからないので容器Ａの粉を舐めてみたら甘かった．

［１］では容器Ａに塩が入っていないことはわかったが，だからといって容器Ｂが塩であるとは断言できない．もしかすると片栗粉かもしれないし，小麦粉かもしれない，あるいは両方とも砂糖が入っているのかもしれない．ようするに，容器Ａの粉を舐めてみても，容器Ｂは白い粉だということしかわからない．

しかし,［２］では一方に塩が，他方に砂糖が入っていることがわかっているから，容器Ａの粉を舐めて甘ければ（塩でなければ）容器Ｂには塩が入っていることになる．

そこで背理法の話になるが，背理法でものを論ずるときには,［２］のように，必ず二つのうちのどちらかであるということが前提になっているのである．

したがって，

「$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ．」

とあれば,「$\sqrt{2}$ は必ず有理数か無理数のどちらかである．」，もう少し細かくいえば,「$\sqrt{2}$ は実数で虚数などを考える必要はなく，しかも，実数には有理数と無理数の２種類しかない．」ということが前提になる．そして，この前提のもと，$\sqrt{2}$ が有理数ではないことが証明される（有理数だと矛盾が生じる）ので，$\sqrt{2}$ はもう一方の「無理数だ」という結論になる．

同じように，

「行列Ａは逆行列を持たないことを証明せよ．」

とあれば,「行列Ａは必ず逆行列をもつかもたないかどちらかだ．」ということが前提になる．そして，この前提のもとに，逆行列を持つと仮定すると矛盾が生じる．だから,「行列Ａは逆行列を持たない」という結論になるのである．

背理法が今一しっくりとこないという人は，この前提をしっかりと踏まえてもられるとしっくりとくるのでないだろうか．

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　K. K.

◆ 重複組合せがよく分からない.

回答

異なる n 個のものから，重複を許して r 個取る組合せを重複組合せといい，その総数を ${}_n\mathrm{H}_r$ で表します。

まず，${}_n\mathrm{H}_r$ は ${}_n\mathrm{C}_r$ と違って，$n < r$ でも意味をもちます。「異なる n 個のものから重複を許して r 個取る」とは,「異なる n **種類のものがたくさんある中から**重複を許して r 個取る」というように考えるからです。

では，例として

3 個の文字 a, b, c から，重複を許して 5 個取る組合せは何通りか。

という問題を考えてみましょう。a や b や c の書かれているカードがたくさん入った箱から 5 枚取り出すような状況をイメージして下さい。取り出した 5 枚のうち，何枚が a で，何枚が b で，何枚が c か，という点に注目して違いを数えることになります。違う選び方かどうかは,

$$\boxed{\mathrm{a}}\quad\boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{c}}$$

$$\boxed{\mathrm{a}}\quad\boxed{\mathrm{a}}\quad\boxed{\mathrm{a}}\quad\boxed{\mathrm{c}}\quad\boxed{\mathrm{c}}$$

$$\boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{c}}\quad\boxed{\mathrm{c}}$$

のように，左から a, b, c の順になるように横一列に並べてしまえば一目瞭然です。取り出したものを並べた列を「順列」といいましたね。つまり，5 枚のカードの選び方は順列に対応させられるのです。

$$\bigcirc \mid \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc \mid \bigcirc \quad\leftrightarrow\quad \boxed{\mathrm{a}}\quad\boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{c}}$$

$$\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc \mid \mid \bigcirc\ \bigcirc \quad\leftrightarrow\quad \boxed{\mathrm{a}}\quad\boxed{\mathrm{a}}\quad\boxed{\mathrm{a}}\quad\boxed{\mathrm{c}}\quad\boxed{\mathrm{c}}$$

$$\mid \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc \mid \bigcirc\ \bigcirc \quad\leftrightarrow\quad \boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{b}}\quad\boxed{\mathrm{c}}\quad\boxed{\mathrm{c}}$$

のように，取り出す 5 枚のカード (の置き場所) を $\bigcirc$ で表し，2 本の仕切り $\mid$ で区切られた 3 つのスペースによって a, b, c の枚数を表す，という方法が教科書にもよく載っています。この順列は，いわゆる「同じものを含む順列」ですね。7 箇所から $\bigcirc$ を配置する 5 箇所を選ぶ場合の総数に等しいので，${}_7\mathrm{C}_5$ 通りになります。よって,

$${}_3\mathrm{H}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = 21 \text{　通り}$$

となります。

一般に,

$$_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

となりますが，これは上の例と同様に考えて，r 個の ◯ と $(n-1)$ 個の $|$ を一列に並べた順列の総数に等しくなります。**選ぶ個数の分だけ ◯ を用意し，選ばれるものの種類の数に応じて仕切りを用意する**，と理解しておきましょう。

また，一見すると重複組合せではないように見える問題もあります。

10 枚の同じカードを 3 人に分ける方法は何通りか。
1 枚も受け取らない人がいてもよい。

これは，1 枚目のカードは A さん，2 枚目のカードは C さん，3 枚目のカードは B さん，$\cdots$ のように,「カードをあげる人を 3 人の中から選ぶ」という作業を 10 回行うことになりますから，求める場合の数は

$$_3\mathrm{H}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_{10} = 66 \text{ 通り}$$

となります。

海城生に答えます　～答えの一案～　　M. Mo.

◆ 放物線 $y=ax^2$ を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動した放物線の方程式がなぜ $y=a(x-p)^2+q$ になるのでしょうか.

回答

初めに準備として, 放物線 C_1 : $y=x^2$ を x 軸に関して対称移動して得られる放物線 C_2 の方程式を求めてみましょう.

点 (x, y) が C_2 上にあるための必要十分条件は, 点 (x, y) を x 軸に関して対称移動した点 $(x, -y)$ が C_1 上にあることです. これを式で表現すると.

$$-y=x^2 \qquad \text{すなわち} \qquad y=-x^2$$

となります. したがって求める C_2 の方程式は,

$$y=-x^2$$

ということになります. この考え方を理解すれば, 一般に曲線 $y=f(x)$ を x 軸に関して対称移動して得られる曲線の方程式が

$$y=-f(x)$$

であることがわかると思います.

せっかくですから, 曲線 $y=f(x)$ を y 軸に関して対称移動して得られる曲線の方程式と原点に関して対称移動して得られる曲線の方程式についても考えてみましょう.

曲線 $y=f(x)$ を C_1 として, C_1 を y 軸に関して対称移動して得られる曲線を C_2, また, C_1 を原点に関して対称移動して得られる曲線を C_3 とします.

まず, 曲線 C_2 の方程式について考えます.

点 (x, y) が C_2 上にあるための必要十分条件は, 点 (x, y) を y 軸に関して対称移動した点 $(-x, y)$ が C_1 上にあることです. これを式で表現すると.

$$y=f(-x)$$

となり, これが求める曲線 C_2 の方程式です.

次に, 曲線 C_3 の方程式について考えます.

点 (x, y) が C_3 上にあるための必要十分条件は, 点 (x, y) を原点に関して対称移動した点 $(-x, -y)$ が C_1 上にあることです. これを式で表現すると.

$$-y=f(-x) \qquad \text{すなわち} \qquad y=-f(-x)$$

となり, これが求める曲線 C_3 の方程式です.

それでは, 最後に放物線 P_1 : $y = ax^2$ を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動して得られる放物線 P_2 の方程式が $y = a(x-p)^2 + q$ になることを説明しましょう.

点 (x, y) が P_2 上にあるための必要十分条件は, 点 (x, y) を x 軸方向に $-p$, y 軸方向に $-q$ だけ平行移動した点 $(x-p, y-q)$ が P_1 上にあることです. これを式で表現すると.

$$y - q = a(x-p)^2 \qquad \text{すなわち} \qquad y = a(x-p)^2 + q$$

となり, これが求める放物線 P_2 の方程式になるわけです. 同様に考えれば, 曲線 $y = f(x)$ を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動して得られる曲線の方程式が

$$y = f(x-p) + q$$

であることがわかると思います.

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　　Y. K.

◆ 解と係数の関係（２次，３次）の成立理由がわからない

回答

２次方程式　$x^2-7x+12=0 \quad \cdots ①$　の左辺を因数分解するとき，たすきがけの方法を用いました。これは，足して -7　掛けて 12 になる整数を見つける方法です。$12=2^2\times 3$ なので，12 の約数は，± 1,　± 2,　± 3,　± 4,　± 6,　± 12 の 12 個あります。これらのうち，和が 7，積が 12 になるのは，　$(3,\,4)$ または $(4,\,3)$　だけです。そこで，左辺は

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=(x-4)(x-3)$$

と因数分解されるわけです。ところで，$(x-3)(x-4)=0$ ならば $x-3=0$ または $x-4=0$ が成り立つので，２次方程式①の解は，　$x=3,\,4 \quad \cdots ②$　であることがわかります。

ところで，①の２つの解を，$\alpha,\,\beta$ とすると，①の左辺を因数分解するとき，

$$\alpha+\beta=7,\quad \alpha\beta=12 \quad \cdots ③$$

となる２つの数 α,β を求めて因数分解したことになるわけですが，実は，①の左辺に②を代入すると，

$$3^2-7\times 3+12=9-21+12=0$$
$$4^2-7\times 4+12=16-28+12=0$$

が成り立ちます、この理由を考えてみると，$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$ と因数分解できたわけですから，②を代入したとき，$x=3$ なら，$3^2-7\times 3+12=(3-3)(3-4)=0\times(-1)=0$ となり，③を満たす数 α,β をみつければ，方程式①の解が見つかるわけです。ただし，整数が見つかればいいのですが，簡単に整数がみつからないことがあります。では，どうしたらいいでしょう。

例えば，２次方程式　$x^2-7x+9=0 \quad \cdots ④$　の整数の解は見つかりません。このようなときは，解の公式がありました。２次方程式の解の公式により，

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times 9}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{49-36}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$$

13 が平方数ではないので，２次方程式の整数の解はないわけです。

ここで，$\alpha=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$,　$\beta=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$ とおいてみます。すると，不思議なことに，

$$\alpha+\beta=7,\quad \alpha\beta=\frac{7^2-\left(\sqrt{13}\right)^2}{2^2}=\frac{36}{4}=9 \quad \cdots ⑤$$

が成り立ち，和が 7，積 9 がである２つの数を求めていることになります。

逆に，和が p，積が q である２つの数 α,β は，連立方程式

$$\alpha+\beta=p,\quad \alpha\beta=q \quad \cdots ⑥$$

の２つの解ですから，⑥から $\beta = p - \alpha$ で β を消去すると，$\alpha(p-\alpha) = q$ すなわち $\alpha^2 - p\alpha + q = 0$ となり，α が２次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の１つの解であることがわかります。

α の方を消去しても，β が２次方程式 $x^2 - px + q = 0$ のもう１つの解であることもわかります。

まとめると，２次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の２つの解を α, β とすると，$\alpha + \beta = p$ かつ $\alpha\beta = q$ が成り立つことがわかります。これを，**２次方程式の解と係数の関係**といいます。

この公式の便利な所は，α, β を因数分解や解の公式で求めなくても，$\alpha^2 + \beta^2$ などの式が簡単に計算できることにあります。２次方程式④の解を代入して計算すると，

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{62+14\sqrt{13}}{4} + \frac{62-14\sqrt{13}}{4} = 31$$

ですが，⑤を用いると，$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 7^2 - 2 \times 9 = 31$ のように，簡単に計算できてしまいます。

解と係数の関係の証明には，次のようなもっとうまい方法があります。２つの数，α, β が，２次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の２つの解であるということは，２つの解が整数でなくても，左辺が $x^2 - px + q = (x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できるからだと考えるのです。すると，展開公式により，

$$x^2 - px + q = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

と成ります。この等式が常に成り立つとすると，係数を比べて，$-p = -(\alpha+\beta)$ かつ $q = \alpha\beta$ すなわち，

$$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = q$$

となることがわかります。これが，２次方程式の解と係数の関係の証明ということになります。

では，何故こんな証明方法を考えるのでしょう。それは，**３次方程式の解と係数の関係**に拡張するためです。３次方程式の解の公式もあるのですが，高校生には難しい公式なので，解の公式を用いて，「３次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の３つの解を α, β, γ とすると，$\alpha + \beta + \gamma = -p, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \quad \alpha\beta\gamma = -r$ が成り立つ。」という定理を証明することができません。ところが，上の証明の考え方を用いると，３次方程式の左辺は，

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解されることになり，右辺を展開して，

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

とすると，係数の比較によって，

$$\alpha + \beta + \gamma = -p, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \quad \alpha\beta\gamma = -r$$

が導かれるのです。

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　　　　　A. Mi.

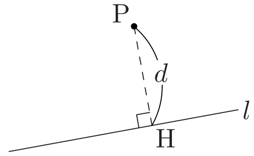
◆ 点と直線の距離の公式が導けない

回答

点と直線の距離の公式というのは以下のようなものでした．

点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ と直線 $l: ax+by+c=0$ の距離を d とすると，

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



点と直線の距離の公式は多くの証明方法が知られています．ここではそのいくつかを紹介します．

■真っ向から挑む

最初に思いつく方法としては，点 P から直線 l に下した垂線の足を H とすると，2 直線 l, PH の交点 H を求め，2 点 P, H 間の距離を求める方法でしょう．計算がやや複雑になりますが，できないわけではありません．

直線 PH は傾きが $\dfrac{b}{a}$ で，点 (x_0, y_0) を通る直線の式ですから，

$$\mathrm{PH}: b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$$

となります．したがって，2 直線 l, PH の交点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} l: ax+by+c=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①} \\ \mathrm{PH}: b(x-x_0)-a(y-y_0)=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

を解くことで求めることができます．この連立方程式を解くと，

$$x = \frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2}, \quad y = \frac{-abx_0+a^2y_0-bc}{a^2+b^2}$$

となりますから，

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(x_0 - \frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{-abx_0+a^2y_0-bc}{a^2+b^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\left(a^2+b^2\right)^2}\left\{\left(a^2x+aby_0+ac\right)^2+\left(abx+b^2y_0+bc\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{\left(a^2+b^2\right)^2}\left\{a^2\left(ax+by_0+c\right)^2+b^2\left(ax+by_0+c\right)^2\right\} \\ &= \frac{(ax+by_0+c)^2}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

より, $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となります.

■こんな方法もあります

先ほどの計算はやや複雑になりますが, 実は次のように上手に工夫することもできます. ①を式変形すると,

$$a(x_0-x)+b(y_0-y)=ax_0+by_0+c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となりますから, ②と③の辺々の 2 乗を加えると,

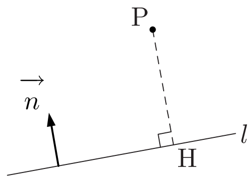
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\frac{(ax_{+}by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

となります. これより, $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

■ベクトルを利用する

ベクトルを利用するのも一つのやり方です.

直線 l の法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ は $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ですから, ある実数 t を用いて,



$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と表すことができます.

これより, 原点を O とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0+ta \\ y_0+tb \end{pmatrix}$$

となりますから, 点 H の座標は (x_0+ta, y_0+tb) と表すことができます. H は直線 l 上の点ですから,

$$a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c=0.$$

t について整理して, $t=-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$.

したがって,

$$d=\left|t\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=|t|\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|=\left|-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

から, $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となります.

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　　　D. T.

◆ 三角形の面積公式 $S=\dfrac{|ad-bc|}{2}$ の証明がわからない

回答

（証明）

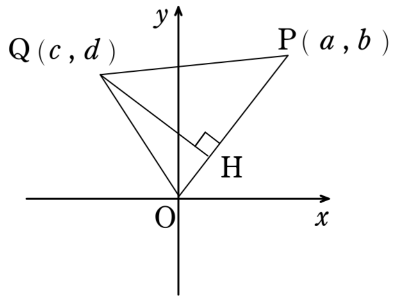
かなりシンプルな証明を紹介しますね．

座標平面上に，原点 O と異なる 2 点 P$(a,\,b)$, Q$(c,\,d)$ がつくる △OPQ があるとします．

まず，点 Q と直線 OP の距離を，a, b, c, d を用いて表します．

直線 OP の方程式は　$bx-ay=0$

$a\neq 0$ のとき	$y=\dfrac{b}{a}x$
$a=0$ のとき	$x=0$



点 Q$(c,\,d)$ から直線 OP に引いた垂線を QH とすると

$$\mathrm{QH}=\frac{|bc-ad|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=\frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

↑「点と直線の距離の公式」を用いました

よって，△OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{OP}\times\mathrm{QH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{a^2+b^2}\times\frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

（証明おわり）

◇ これ以外の証明方法もあります（ベクトルを用いる方法など）．

皆さん，ぜひ調べてみて下さい！

◇ この面積公式を用いる場面例を紹介します．結構，便利です．

【例題】3 点 A(1, 1), B(3, 7), C(5, 4) を頂点とする， △ABC の面積を求めよ．

【解】A(1, 1) を 原点 O に移動させる．その移動を B(3, 7), C(5, 4) にも施すと，それぞれ B′(2, 6), C′(4, 3) となる．このとき，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{OB'C'}=\frac{1}{2}\times|2\times 3-6\times 4|=\frac{1}{2}\times 18=9\cdots(\text{答})$$

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　　　K. K.

◆ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+4x-1}{2x^2-3}=3$ となる見当がつけられない。

回答

この等式は,「分数式 $\dfrac{6x^2+4x-1}{2x^2-3}$ において, x の値を限りなく大きくすると, この分数式の値は 3 に近づく」ということを意味しています。ここで,「x の値を限りなく大きくする」とありますが, これは x のところには 10 や 20 程度の数ではなく, もっと大きな, 桁外れな数を代入することをイメージします。試しに, x にいくつか値を代入してみます。

$x=10$ のとき,

$$\frac{6\cdot 10^2+4\cdot 10-1}{2\cdot 10^2-3}=\frac{600+39}{200-3}=\frac{639}{197}=3.24365\cdots$$

$x=20$ のとき,

$$\frac{6\cdot 20^2+4\cdot 20-1}{2\cdot 20^2-3}=\frac{2400+79}{800-3}=\frac{2479}{797}=3.1104\cdots$$

$x=100$ のとき,

$$\frac{6\cdot 100^2+4\cdot 100-1}{2\cdot 100^2-3}=\frac{60000+399}{20000-3}=\frac{60399}{19997}=3.0204\cdots$$

$x=1000$ のとき,

$$\frac{6\cdot 1000^2+4\cdot 1000-1}{2\cdot 1000^2-3}=\frac{6000000+3999}{2000000-3}=\frac{6003999}{1999997}=3.0020\cdots$$

確かに 3 に近づきそうですね。ここで, 分母と分子それぞれにおいて, 2 次の項の値と, 1 次の項や定数項の値を比べてみて下さい。後者が圧倒的に小さいことが分かりますね (各場合, 左から 2 番目の式を見てみて下さい)。 2 次の項の値の大きくなるスピードが, 1 次の項に比べて圧倒的に速いのです。ということは,

x の値が十分大きいとき, $\dfrac{6x^2+4x-1}{2x^2-3}$ は, ほぼ $\dfrac{6x^2}{2x^2}$ すなわち 3 である

と言っても良いのではないでしょうか。このような問題の場合, 次数の最も大きい項にまず注目すると, おおよその見当がつくわけです。教科書などでよく書かれている解法:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+4x-1}{2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{6x^2}{x^2}+\dfrac{4x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x^2}}=\frac{6+0-0}{2-0}=3$$

という, 分母の最高次である x^2 の項で分母・分子を割る方法は, その見当が正しいことをきちんと記述したものになっています。

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　　　T. S.

◆ x 切片が a，y 切片が b の直線はなぜ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ となるのか。

回答

まずはみんながよく馴染んでいる $y=ax+b$ の形で考えてみましょう。

x 切片が a，y 切片が b なので，この直線は点 $\mathrm{A}(a,0)$ と点 $\mathrm{B}(0,b)$ を通ります。
A から B への変化の割合は，$\dfrac{b-0}{0-a}=-\dfrac{b}{a}$ です。
また y 切片は b なので，この直線は，$y=-\dfrac{b}{a}x+b$ となります。
この直線の式を変形することで，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ が出てきます。

実際の考え方

しかし，実際にこの公式を使うときは毎回上のように導くのではなく，次のような順序で考えて，確信をもってこの公式を使えるようにする練習が大事です。

① 「$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ は直線の式だ！」と思う。

② 「$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ は点 $(a,0)$ を通る！」と思う。→代入してみれば簡単にわかりますね。

③ 「$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ は点 $(0,b)$ を通る！」と思う。→代入してみれば簡単にわかりますね。

④ 「2 点を通る直線はただ 1 つであるから，これは x 切片が a，y 切片が b の直線の式だ！」と確信がもてる。

このような順序で考えれば，なんとなくの形を覚えているだけでも，確信をもってこの公式を使えるようになります。(確信がもてないまま式変形をすることはとっても危険ですからね。)

例 例えば次の直線の式も次のような考え方で確信がもてるようになります。

『傾きが a で，点 (p,q) を通る直線の式は，$y-q=a(x-p)$ であること』

① 「$y-q=a(x-p)$ は直線の式だ！」と思う。

② 「$y-q=a(x-p)$ の傾きは a だ！」と思う。→頭の中で展開すれば簡単にわかりますね。

③ 「$y-q=a(x-p)$ は点 (p,q) を通る！」と思う。→代入してみれば簡単にわかりますね。

④ 「1 点と傾きが決まれば直線は一意に決まるから，これは傾きが a で，点 (p,q) を通る直線の式だ！」と確信がもてる。

公式はただ丸暗記するのではなく、確信が持てるような考え方をできるように訓練することがとても重要です。

海城生に答えます　～答えの一案～　　　　K. K.

◆ 実数係数の方程式が虚数解をもつとき、その共役な複素数も解であるのはなぜか。

回答

複素数 $z=a+bi$ に対して、$\overline{z}=a-bi$ を共役な複素数といいます。

実数係数の方程式が虚数解をもつとき、共役な複素数もその方程式の解になっています。係数に実数でないものがある場合は、共役な複素数もその方程式の解になるとは限りません。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が虚数解をもつのは、解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の根号の中が負になる場合ですから、根号の前に複号がついていることから分かります。

例えば、$3x^2-x+2=0$ を解くと $x=\dfrac{1\pm\sqrt{-23}}{6}$ より $x=\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{23}}{6}i,\ \dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{23}}{6}i$ となり、確かに共役な複素数がペアで解になっています。

3 次以上の方程式については、解の公式が複雑な形をしているため、このように確かめることは難しいですし、そもそも 5 次以上の方程式については解の公式が存在しません。教科書や参考書では、多くの場合はこの事実を説明するのに”共役な複素数のもつ性質”を利用して説明しています。その性質とは、複素数 z,w に対して、

$$\overline{z\pm w}=\overline{z}\pm\overline{w}\quad,\quad \overline{z\times w}=\overline{z}\times\overline{w}\quad,\quad z=w\Leftrightarrow\overline{z}=\overline{w}$$

というものです。これを用いると、3 次方程式の場合については、次のように説明することができます。

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ が $x=\alpha$ を解にもつとき、

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$$

です。これより

$$\overline{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}=\overline{0}$$

よって、

$$\overline{a}(\overline{\alpha^3})+\overline{b}(\overline{\alpha^2})+\overline{c}(\overline{\alpha})+\overline{d}=\overline{0}$$

ここで、$\underline{0,a,b,c,d\text{ は実数であるから}}$

$$\overline{0}=0\quad,\quad\overline{a}=a\quad,\quad\overline{b}=b\quad,\quad\overline{c}=c\quad,\quad\overline{d}=d$$

となり、また

$$\overline{\alpha\times\alpha}=\overline{\alpha}\times\overline{\alpha}\text{ より }(\overline{\alpha^2})=(\overline{\alpha})^2\quad,\quad\text{同様に }(\overline{\alpha^3})=(\overline{\alpha})^3$$

であるから

$$a(\overline{\alpha})^3+b(\overline{\alpha})^2+c(\overline{\alpha})+d=0$$

となります。この式は、$\overline{\alpha}$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解であることを示しています。

4 次以上の方程式についても、同様に説明することができます。

海城生に答えます　～答えの一案～　　M. Mu.

◆ 円順列は何で $(n-1)!$ になるのか？

回答

一般に，教科書では次のような説明になっています．

A，B，C，D の 4 人が手をつないで円に並ぶ方法は，

図 1 の円の 1 ～ 4 に順番に並ぶ方法が，

4！(通り)　…　①

しかし，1 ～ 4 に並ぶ順番が，

A → B → C → D

B → C → D → A

C → D → A → B

D → A → B → C

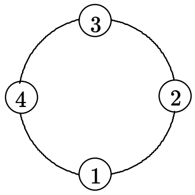


図 1

の 4 つの並び方（図 2 ）は，回転すれば同じ並び方になります．

このように回転をすれば同じになる 4 つの並び方を①では違う並び方として数えています．

したがって，実際の並び方（円順列）は，

$$\frac{4!}{4} = (4-1)! \quad (\text{通り})$$

となります．

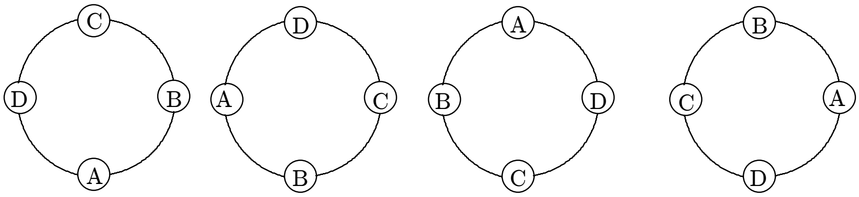


図 2

ここで面倒なのは，「回転をすると同じになるものがある」ということです．

恐らくここがわかりにくいポイントなのではないでしょうか．

では，

「回転を考えずに数える方法はないでしょうか？」

実はあるのです．

例えば，自分の周りを見回してみてください．

机，椅子，パソコンなどがあると思いますが，実はそれらも常に動いているのです．

「え？」

と思うでしょうが，地球の外から見れば自転，公転によって常に動いているのです．

「では，なぜそれが止まって見えるのでしょうか？」

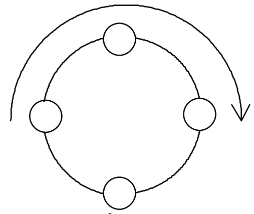
そう，自分が地球上にいるからです．

円順列でもこれと同じ考え方をすれば，この面倒な回転を考えずに求めることができるのです．

上の例ならば，自分が 4 人の中の 1 人になって輪を作ってみましょう．
そうすれば，自分から見た他の 3 人との位置関係（左隣り，正面，右隣り）は回転とは関係なくなります．
そこで，自分以外の 3 人の並び方を数えれば，

$$3! = (4-1)!$$（通り）

となるのです．

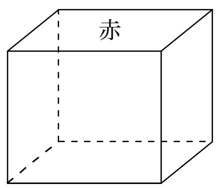


ここまでは 4 人が円に並ぶ方法でしたが，これを一般的に n 人が円に並ぶ方法とすれば，

$$(n-1)!$$（通り）

となるのです．

では次にこの考え方を使って立方体を赤，青，黄，緑，黒，白の異なる 6 色に塗る方法を求めてみましょう．



この問題も，見た目は異なる塗り方でも立方体が回転をすると同じになることを考えなければいけないところが面倒なところです．

そこで，さっきと同じように今度は自分が立方体の面の上，例えば赤の面に乗ってみましょう．
そうすると，今度は，立方体がどんなに回転をしても自分から見て他の 5 つの面との関係はいつも同じになるので，他の 5 つの面の塗り方数えればよいことになります．
では，塗り方が何通りあるか求めてみましょう．
まず，裏側の面の塗り方は，赤以外の 5 色から選べるので

$$5$$（通り）

次に側面の塗り方ですが，側面の塗り方は円順列になるので，残りの 4 色を塗る方法は，

$$(4-1)! = 3! = 6$$（通り）

したがって，立方体を異なる 6 色に塗る方法は，

$$5 \times 6 = 30$$（通り）

となります．

このように，回転をすることで同じものがあらわれるような問題を解くとき，外から全体を数えるのではなく，並べられるものの中から何か一つに注目をし，そこから見て他の並び方を数えるという方法をぜひ覚えておいてください．

海城生に答えます　～答えの一案～ T. S.

◆ 積和，和積の成立する理由が不明，どうやって覚えるか．

回答

とても覚えにくいものなので，すぐに暗記しようとするのは危険だと思います．導き方をここで紹介しましょう．下の加法定理 (1)～(4) に関しては覚えているものとします．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{1}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{2}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{3}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

三角関数の積を和・差に，また和・差を積に直したいときはまず上の４つの式から下の４つの式を作ってしまいましょう．

$$(1)+(2)\ :\quad \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \tag{5}$$
$$(1)-(2)\ :\quad \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta \tag{6}$$
$$(3)+(4)\ :\quad \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \tag{7}$$
$$(3)-(4)\ :\quad \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta \tag{8}$$

上の (5) から (8) を見れば，左辺が和・差で，右辺が積であることは一目瞭然ですから，もう本質的にはこれで公式がすべて導けたわけです．ではどのように使うのでしょうか．

例１　$\sin x-\sin y$ を積に直すときは $\sin\boxed{}-\sin\boxed{}$ の形がある (6) に注目しましょう．

今，$\alpha+\beta=x$，$\alpha-\beta=y$ とおけば良いのですから，この連立方程式を解けば，$\alpha=\dfrac{x+y}{2}$，$\beta=\dfrac{x-y}{2}$ となります．これを (6) に代入すると，以下の公式が導かれます．

$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

例２　$\sin x\sin y$ を和・差に直すときは $\sin\boxed{}\sin\boxed{}$ の形がある (8) に注目しましょう．

今，$\alpha=x$，$\beta=y$ とおけば良いのですから，これを (8) に代入すると，$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y$ となります．つまり，以下の公式が導かれます．

$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\{\cos(x+y)-\cos(x-y)\}$$

世間で和積の公式・積和の公式と呼ばれているものはすべて (5)～(8) からこのような方法で導くことができます．何度も練習すればそんなに時間をかけずに導けるようになりますから，すぐに覚えようとするのではなく少し練習してみてはいかがでしょうか．

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　H. U.

◆ 真数はなぜ正なのか．負のときの値はどうなるのか．

回答

前半の疑問を解決するために，まず対数の定義を思い出してみましょう．$a > 0$, $a \neq 0$ のとき，指数関数のグラフより，任意の正の数 b に対して $a^r = b$ を満たす実数 r がただ 1 つ存在します．この r の値を a を**底**とする b の**対数**といい，$\boldsymbol{\log_a b}$ と表します．また，b をこの対数の**真数**といいます．したがって，真数が正であることは真数の定義から明らかなのです．

次に，後半の疑問に答えましょう.「ついさっき真数は正であると言ったばかりではないか」と思う人もいるかもしれませんが，それは実数の世界でのお話です．対象を複素数まで拡げると新たな世界が拓けていきます！

複素数 $z \neq 0$ の絶対値を r，偏角を θ とすると，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が成り立ちますが，オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を用いることで，z は $z = re^{i\theta}$ と書くことができます．ただし，i は虚数単位，e は自然対数の底です．さて，複素変数の対数関数 $w = \log z$ は，同じく複素変数の指数関数 $z = e^w$ の逆関数として定義されます．すると，$w = x + iy$ とおくことで，$z = e^w$ より，

$$re^{i\theta} = e^w = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

すなわち，$re^{i\theta} = e^x e^{iy}$ が成り立ち，両辺の複素数の絶対値と偏角が等しいことから，

$$r = e^x, \quad y = \theta + 2n\pi$$

を得ます．ただし，n は整数です．特に，第 1 式から $x = \log r$ とわかります.（x も r も実数なので，この log は冒頭で紹介した実数変数の対数です.）したがって，$w = \log z$ から，

$$\log z = w = x + iy = \log r + i\theta + 2n\pi i,$$

すなわち，

$$\log z = \log r + i\theta + 2\pi i \times n$$

が得られます．注意として，偏角の取り方が無限個存在するため，複素数の対数は無限個の値を取ります．そこで，絶対値が r，偏角が θ である複素数 z の対数を，

$$\boldsymbol{\mathrm{Log}\, z = \log r + i\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)}$$

で定義しましょう．すると，z が実数のとき偏角が 0 であることから，これは実数変数の対数関数と一致します．これを $\log z$ の**主値**と呼びます.（ただし，これは主値の一般的な定義ではなく，今回の解説のために用いる便宜的な定義です.）

それでは，真数が負の場合の対数の値（主値）を求めてみましょう．特に，真数が -1 のときを調べると，-1 は絶対値が 1，偏角が π の複素数なので，

$$\mathrm{Log}\,(-1) = \log 1 + i\pi = i\pi$$

がわかります．一般に，真数が負である対数の値（主値）は虚数となります．