続・海城生に聞きました
～数学，ここがわからない～

◆ 固有値を求めて対角化する方法，なぜそれでうまくいくのか。

◆ 固有値，固有ベクトルは何を表しているのか。

◆ $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$ となる理由は?

◆ 数学的帰納法がよくわからない。
(なぜ k のときを仮定して $k+1$ のときを示せば証明になるのか)
($k, k+1$ のときを両方仮定しなければならないのはどういうときか)

◆ 因数定理で代入する数の候補が $\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}} \cdots (*)$ である理由が不明

◆ 因数分解（根本，高次などの難しいものまで）がよく分からない

◆ 一次分数型漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ $(ps - qr \neq 0)$ の解き方がよくわからない

◆ 三角形の傍心とはなにか？

◆ $\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{b}$, $0 < s + t < 1$ が何を意味しているのか不明

◆ 弧度法がよくわからない

◆ 外積の公式がよくわからない.

◆ なぜ $-\dfrac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ で面積が求まるのか.

海城生に答えます　〜答えの一案〜　　　A. H.

◆ 固有値を求めて対角化する方法，なぜそれでうまくいくのか。

回答

固有値を求めて対角化する方法，をまず説明します。

$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と λ が存在するとき，λ を**固有値**，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を**固有ベクトル**といいます。このとき，左辺に移項して

$$(A-\lambda E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\cdots(*)$$

となります。これが，$x=y=0$ 以外の解をもつとき，$A-\lambda E=\begin{pmatrix}a-\lambda & b\\c & d-\lambda\end{pmatrix}$ は逆行列をもたない形となり，

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=\lambda^2-(a+c)\lambda+ad-bc=0$$

となります。（これを**固有方程式**といいます。）この解が固有値です。行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}$ を例に見ていきましょう。固有方程式は

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

この解 $\lambda=2,\ 3$ が固有値です。$\lambda=2$ のとき，

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

とすると，$\begin{cases}x+2y=2x\\-x+4y=2y\end{cases}$　すなわち $y=\frac{1}{2}x$

よって，これを満たすベクトルの一つは $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ で，

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad\cdots①'$$

$\lambda=3$ のとき，

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\cdots②$$

とすると，$\begin{cases} x+2y=3x \\ -x+4y=3y \end{cases}$ 　すなわち $y=x$

よって，これを満たすベクトルの一つは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots ②'$$

①′，②′ を並べると

$$A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と行列で表せます。$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P$ とおくと，P は逆行列をもつので，両辺に左から P^{-1} をかけて，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

と対角化できました。

　ここまでの説明で，いろいろと問題点が出てきます。

(1)　$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と λ は本当に存在するのか？
　　すなわち固有値，固有ベクトルは本当に存在するのか？

(2)　$(*)$ が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解をもつとき，なぜ $A-\lambda E$ は逆行列をもたないのか？

(3)　固有値を代入した連立方程式は，なぜ 2 式が同じ意味の式なのか？

(4)　固有ベクトルは適当にとってよいのか？

(5)　「①，②を並べると」の後の行列の式は，なぜそうなるのか？

(1) について，固有方程式が異なる 2 つの実数解をもつときは，それらが固有値となり，対応する固有ベクトルが例のように求められます。しかし，重解となるとき，固有値と固有ベクトルは 1 組しかありません。このときは $A=\lambda E$ の場合を除いて対角化できません。また，異なる 2 つの虚数解のときは，虚数値の固有ベクトルを用いれば対角化できますが，実数値の範囲では対角化できません。

　(2)，(3) は連立方程式の問題ですね。行列によって表された連立方程式 $(*)$ は，原点を通る 2 直線を表しているので，原点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は必ず解になっています。原点以外の解をもつということは，2 直線は一致しているということになり，逆行列をもたないということになります。

(4) について，例えば $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ① を満たすベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ならば，$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ でも $\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ でも $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ でもその実数倍のベクトルはすべて，①を満たします。これは ① の両辺を実数倍しても構わないということです。

(5) について，これは行列の不思議ですね。行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，対角行列 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}$ を左からと右から，それぞれかけると

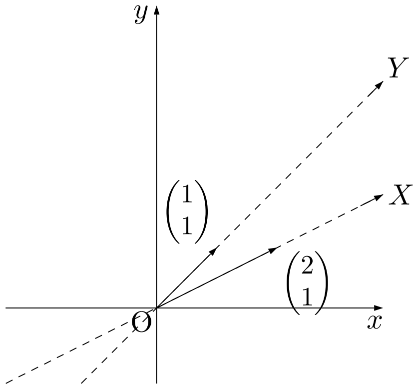
$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ \ell c & \ell d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & \ell b \\ kc & \ell d \end{pmatrix}$$

となります。行列の積が交換可能でないこと示す顕著な一例ですね。

行列の対角化とは，2 つの固有ベクトル方向に新しい座標軸（X 軸，Y 軸とする）を設定して，X，Y を用いて 1 次変換を表したものです。$(*)$ における行列 P は，XY 座標を xy 座標にうつす行列で，このような別の座標にうつす 1 次変換を**座標変換**といいます。

$$\begin{tikzcd} (x,\ y) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"] & (x,\ y) \\ (X,\ Y) \arrow[u, "P"] \arrow[r] & (X,\ Y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



海城生に答えます　〜答えの一案〜　　　A. H.

◆ 固有値，固有ベクトルは何を表しているのか。

回答

1次変換は，固有値・固有ベクトルによって視覚的に理解できます。

(1) 固有値が異なる2実数 λ_1，λ_2 のとき

行列 A の固有値を λ_1，λ_2 $(\lambda_1 \fallingdotseq \lambda_2)$ とし，それぞれに対する固有ベクトルを $\vec{u_1}$，$\vec{u_2}$ とすると

$$A\vec{u_1} = \lambda_1\vec{u_1}, \quad A\vec{u_2} = \lambda_2\vec{u_2}, \quad \vec{u_1} \not\parallel \vec{u_2}$$

が成り立ちます。
よって $\vec{u_1}$ と $\vec{u_2}$ は1次独立だから，任意のベクトル $\vec{x}$ は

$$\vec{x} = p\vec{u_1} + q\vec{u_2} \quad (p,\ q \in \mathbb{R})$$

> $\vec{u_1} \parallel \vec{u_2}$ とすると，$\vec{u_1} = t\vec{u_2}$ と表せて，
>
> $$A\vec{u_1} = A(t\vec{u_2}) = tA\vec{u_2}$$
> $$\lambda_1\vec{u_1} = t\lambda_1\vec{u_2} = t\lambda_2\vec{u_2}$$
>
> よって $\lambda_1 = \lambda_2$ となり矛盾。

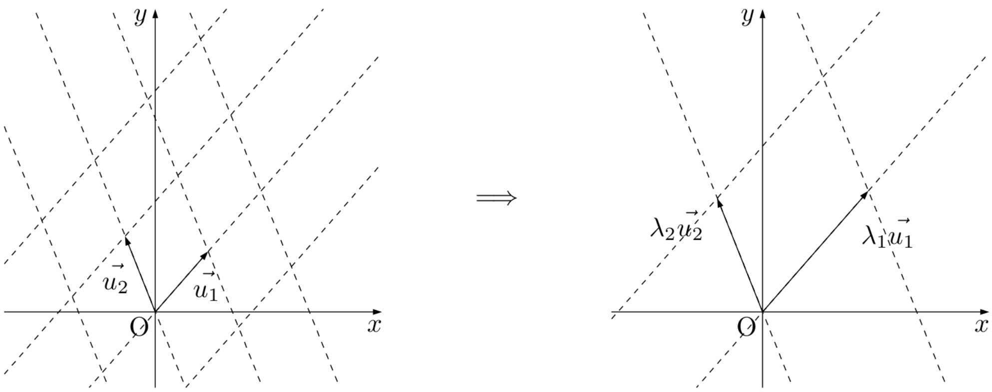
と表せます。よって A をかけると

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= A(p\vec{u_1} + q\vec{u_2}) \\ &= pA\vec{u_1} + qA\vec{u_2} \\ &= p\lambda_1\vec{u_1} + q\lambda_2\vec{u_2} \\ &= \lambda_1 \cdot p\vec{u_1} + \lambda_2 \cdot q\vec{u_2} \end{aligned}$$

となります。よって，A による1次変換は xy 平面全体を

$\vec{u_1}$ 方向に λ_1 倍
$\vec{u_2}$ 方向に λ_2 倍

に拡大・縮小する変換です。λ_1，λ_2 が負の値の場合は折り返しになります。



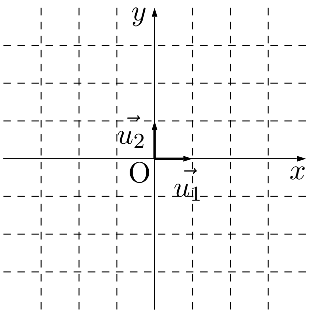
$\boxed{例 1}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

A の固有値は 2, 3 で，それぞれに対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

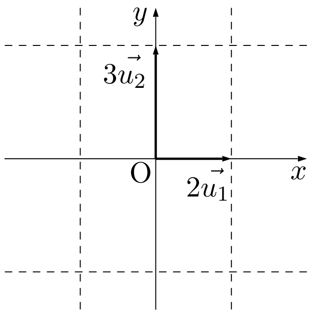
よって，A による 1 次変換は,

x 軸方向に 2 倍，y 軸方向に 3 倍

に拡大する変換です。(正方形を 2 辺の方向に引っ張って長方形にする変換)



$\Longrightarrow$



$\boxed{例 2}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき

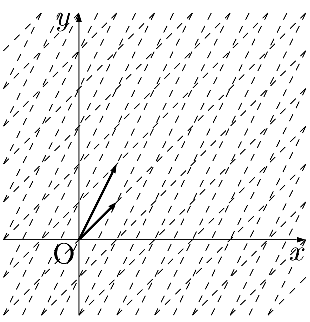
固有方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ より $\lambda = 3,\ 2$

それぞれに対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

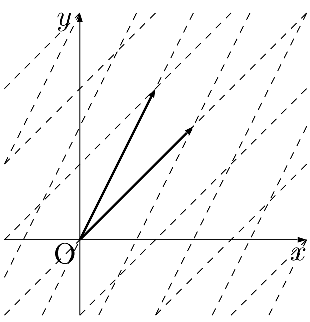
よって，A による 1 次変換は

$y = x$ の方向に 3 倍，$y = 2x$ の方向に 2 倍に延ばす 1 次変換

です。(平行四辺形を 2 辺の方向に引っ張る変換)



$\Longrightarrow$



$\boxed{例 3}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき

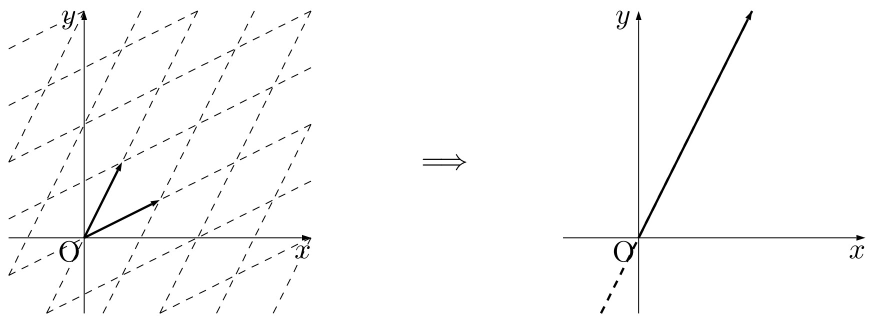
固有方程式 $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ より固有値は 3, 0

対応する固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

よって，よって，A による 1 次変換は

$$y = \frac{1}{2}x \text{ 方向を } \vec{0} \text{ に圧縮して } y = 2x \text{ にうつし，}$$
$$y = 2x \text{ 方向を 3 倍に延ばす 1 次変換}$$

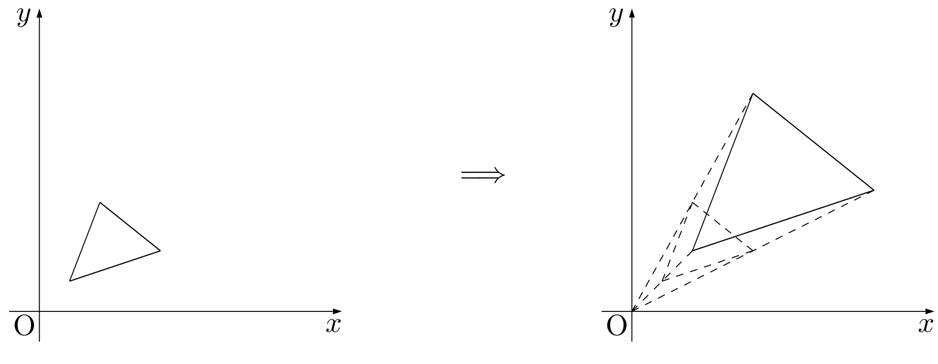
です。（平面を直線 $y = 2x$ に圧縮し，引っ張る）



(2) 固有値が 1 つの実数（重解）λ のとき

(a) $A = \lambda E$ のとき
任意のベクトルが固有ベクトルとなります。
A による 1 次変換は λ 倍の相似拡大・縮小を表します。

$\boxed{\text{例 4}}$ $A = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ のとき
A の固有値は 2 で，A による 1 次変換は，xy 平面全体を 2 倍に拡大する変換です。



(b) $A \fallingdotseq \lambda E$ のとき

λ に対する固有ベクトルを $\vec{u}$ とすると $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

すなわち $(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$

また，ハミルトン・ケーリーの定理より $(A - \lambda E)^2 = O$

よって，任意の $\vec{x}$ に対し $(A - \lambda E)\vec{x} = t\vec{u}$ となる。

よって，$A\vec{x} = \lambda\vec{x} + \vec{u}$ となる $\vec{x}$ の 1 つ求めると，2 式を並べて

$$A(\vec{u},\ \vec{x}) = (\vec{u},\ \vec{x})\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$P = (\vec{u},\ \vec{x})$ とおくと，

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}$$

これは，A による 1 次変換が

$\vec{u}$ 方向に λ 倍し，

$\vec{x}$ を λ 倍し $\vec{u}$ を加えたベクトルにうつす

変換となることを表しています。

$\boxed{\text{例 5}}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき

固有方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ より固有値は 2

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $y = 1$

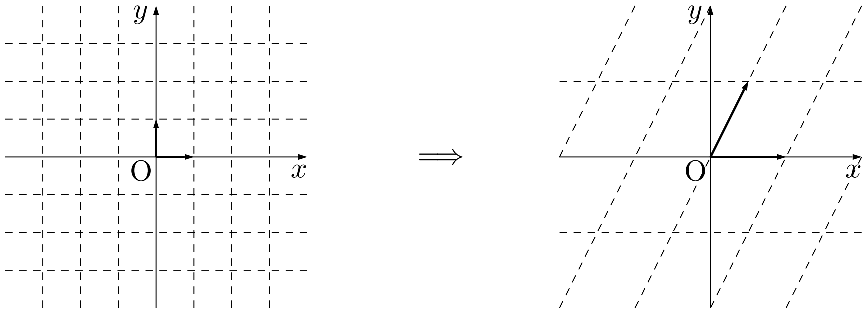
よって，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとります。

A による 1 次変換は

x 軸方向に 2 倍し，

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を 2 倍して $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を加えた $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ にうつす

変換となります。



$\boxed{\text{例 6}}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

固有方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ より固有値は 2

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cdots$①

$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とすると $y = 2x - 1$

この直線上の 1 点の $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとると

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

①，②合わせて

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

よって

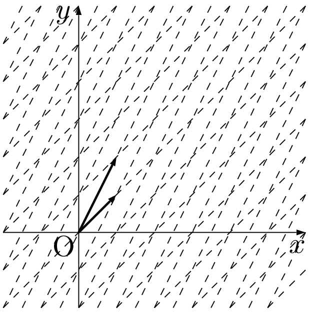
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

A による 1 次変換は

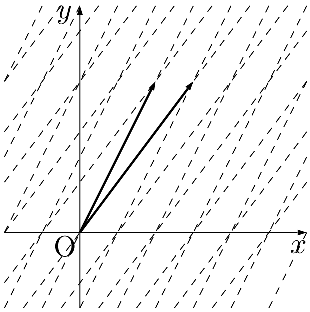
$y = 2x$ 方向に 2 倍し，

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を 2 倍して $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を加えた $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ にうつす

変換となります。



$\Longrightarrow$



$\boxed{例 7}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき

固有方程式 $\lambda^2 = 0$ より固有値は 0

対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

また，$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ より $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

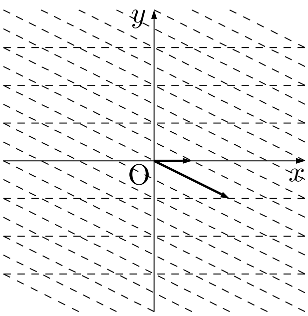
この直線上の 1 点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとる。

A による 1 次変換は

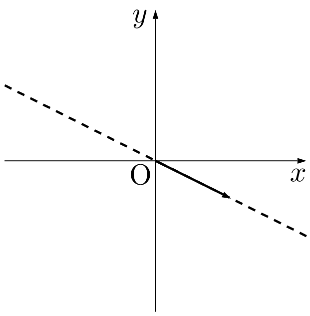
$y = -\dfrac{1}{2}x$ 方向を $\vec{0}$ に圧縮して x 軸にうつし，

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ にうつす

変換となります。(A を 2 回行うとすべて $\vec{0}$)



$\Longrightarrow$



(3) 固有値が虚数のとき

回転行列のように固有値が虚数のときは，固有ベクトルも虚数を用いて表されます。
このような行列による 1 次変換は，原点中心の楕円の周上の回転と拡大縮小となります。

(a) 2 次曲線の行列表示

2 次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1 \quad \cdots (*)$$

と表されます。対称行列 $T=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ は直交行列によって対角化され，実数の固有値 $\alpha,\ \beta \quad (\alpha \geqq \beta)$ をもちます。よって

$$\alpha \geqq \beta > 0 \text{ のとき楕円，} \alpha > 0 > \beta \text{ のとき双曲線}$$

となります。行列式 $\det T = \alpha\beta$ なので，

$$\det T > 0 \text{ のとき楕円，} \det T < 0 \text{ のとき双曲線}$$

となります。また，$(*)$ の表示より，2 次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ を不変にする 1 次変換を表す行列は

$$\left\{ A \;\middle|\; {}^tA\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right\}$$

と表せることが分かります。

(b) 固有値が絶対値 1 の共役複素数のとき

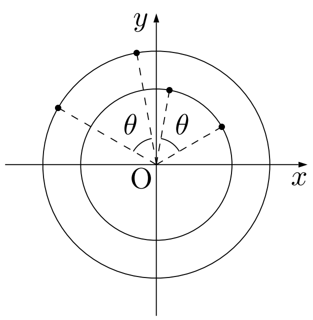
$\boxed{\text{例 8}}$ 回転行列 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき

固有方程式 $\lambda^2-2(\cos\theta)\lambda+1=0$ より固有値は $\cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$

それぞれの固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ だから，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

円 $x^2+y^2=w^2$ は A による 1 次変換で不変です。



行列 A が複素数の固有値 $e^{\pm i\theta}$ をもつとします。それぞれの固有ベクトルの 1 つを
$\begin{pmatrix}1\\s+ti\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\s-ti\end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ s+ti & s-ti\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ s+ti & s-ti\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ s+ti & s-ti\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ s+ti & s-ti\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ s+ti & s-ti\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\frac{i}{2t}\begin{pmatrix}s-ti & -1\\ -s-ti & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ s & -t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\frac{1}{t}\begin{pmatrix}t & 0\\ s & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで $P^{-1} = \dfrac{1}{t}\begin{pmatrix}t & 0\\ s & -1\end{pmatrix}$ とおくと

$$A = P\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}P^{-1}$$

また

$${}^tP^{-1}P^{-1} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix}t & s\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{t}\begin{pmatrix}t & 0\\ s & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix}s^2+t^2 & -s\\ -s & 1\end{pmatrix}$$

これは対称行列で行列式は

$$\frac{1}{t^4}\{(s^2+t^2)-s^2\} = \frac{1}{t^2} > 0$$

より，x, y の 2 次式

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}{}^tP^{-1}P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\frac{1}{t^2}\begin{pmatrix}s^2+t^2 & -s\\ -s & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = w^2$$

すなわち

$$(s^2+t^2)x^2 - 2sxy + y^2 = t^2w^2 \quad \cdots ①$$

は楕円を表します。この楕円は P^{-1} で円 $x^2+y^2=w^2$ にうつります。
円は回転行列で不変で，P によって楕円①に戻ります。したがって，

楕円①は A によって不変

となります。

$\boxed{例 9}$ $A = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ のとき

固有方程式 $\lambda^2+\lambda+1=0$ より固有値は $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

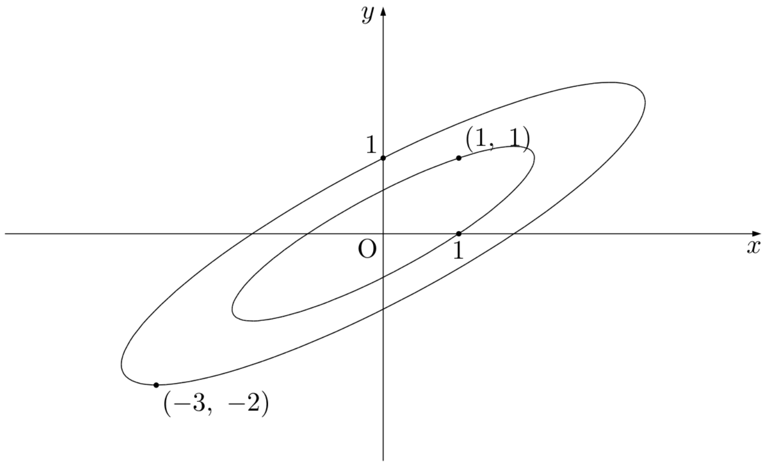
それぞれの固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3-\sqrt{3}i}{6} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3+\sqrt{3}i}{6} \end{pmatrix}$ だから，$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

よって，A による 1 次変換で不変となる楕円は $x^2-3xy+3y^2=\dfrac{w^2}{4}$ となります。

例えば，

(1, 0) と A でうつした先の (1, 1) はともに楕円 $x^2-3xy+3y^2=1$ 上にあります。

(0, 1) と A でうつした先の (−3, −2) はともに楕円 $x^2-3xy+3y^2=3$ 上にあります。



(c) 固有値が絶対値 $c\ (>0)$ の共役複素数のとき

$\dfrac{1}{c}A$ の固有値の絶対値は 1 となります。

よって，原点を中心とする楕円上の回転と c 倍の相似拡大・縮小として考えられます。

補足

固有値が虚数値のときと同様に考えると，符号が等しく値が異なる 2 つの実数値のときは双曲線が固定されます。

双曲線関数 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，　$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ は，三角関数 $\cos x$，$\sin x$ と類似した公式をもちます。

- $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

- $\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$
- $\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$

$\boxed{\text{例 10}}$

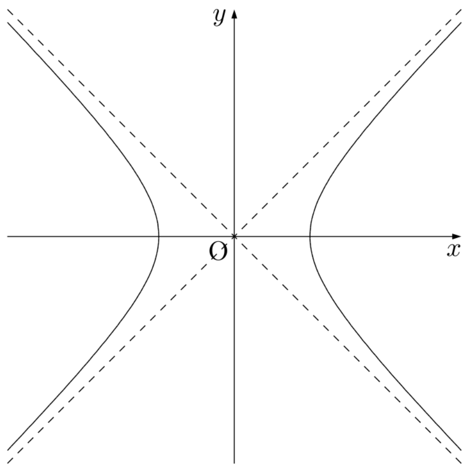
直角双曲線 C： $x^2 - y^2 = w^2$ 上の点は $\begin{pmatrix} w\cosh t \\ w\sinh t \end{pmatrix}$ とおけます。

$A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$ とすると，

$$A\begin{pmatrix} w\cosh t \\ w\sinh t \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} \cosh\theta\cosh t + \sinh\theta\sinh t \\ \sinh\theta\cosh t + \cosh\theta\sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w\cosh(t+\theta) \\ w\sinh(t+\theta) \end{pmatrix}$$

より，A によって C 上の点は C 上にうつります。
A の固有方程式は $\lambda^2 - 2(\cosh\theta)\lambda + 1 = 0$ で，固有値は $\lambda = e^{\theta},\ e^{-\theta}$
それぞれに対する固有ベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
これは C の漸近線の方向ベクトルを表しています。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix}$$



(1) 行列 A の固有値が正の実数値 $e^{\theta},\ e^{-\theta}$ （積が 1 ）のとき

対応する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\theta & 0 \\ 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1}
\end{aligned}
$$

ここで $P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ とおくと，

$$
A = P \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} P^{-1}
$$

また ${}^tP^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ は対称行列なので $\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$ とおくと

$$
px^2 + 2qxy + ry^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} {}^tP^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

行列式は

$$
pr - q^2 = -\frac{1}{(\det P)^2} < 0
$$

より，

$$
px^2 + 2qxy + ry^2 = w^2 \quad \cdots ①
$$

は双曲線を表します。この双曲線を P^{-1} でうつすと直角双曲線 $C:\ x^2 - y^2 = w^2$ にうつります。

C は $\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$ で不変です。

P によって C は もとの双曲線①へ戻ります。よって，

双曲線 ① は A によって不変

となります。

(2) 行列 A の固有値が異なる 2 つの正の実数値のとき

$\dfrac{1}{\sqrt{\det A}} A$ は，固有値の積が 1 となるので (1) より，ある双曲線を不変にします。A はさらに $\sqrt{\det A}$ 倍相似拡大縮小したものです。

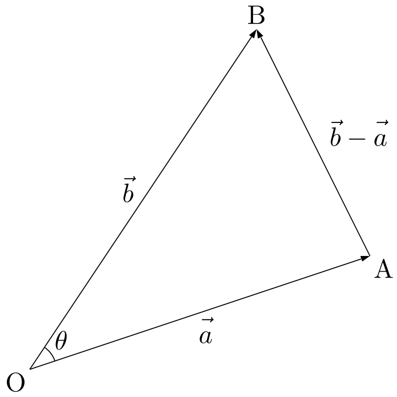
海城生に答えます　～答えの一案～　　H. H.

◆ $(a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$ となる理由は?

回答

ベクトルを扱うとき，平面および空間では通常の距離および角が定められており，$\vec{0}$ でない $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ に対して，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ と定義されています。($\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のとき $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$)

図のように $\triangle$OAB を定めます。



$0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき，$\triangle$OAB に余弦定理を用いると，

$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta$

この式は $\theta = 0^\circ$, 180° のときも成り立ちます。

$\mathrm{AB} = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|$, $\mathrm{OA} = \left|\vec{a}\right|$, $\mathrm{OB} = \left|\vec{b}\right|$, $\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta = \vec{a}\cdot\vec{b}$ ですから，

$\left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

この式は $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも成り立ちます。

空間ベクトルの場合も，同じようにして余弦定理を用いて，

$(a_1, a_2, a_3)\cdot(b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ が求められます。

海城生に答えます　〜答えの一案〜 H. H.

◆ 数学的帰納法がよくわからない。
(なぜ k のときを仮定して $k+1$ のときを示せば証明になるのか)
($k, k+1$ のときを両方仮定しなければならないのはどういうときか)

回答

教科書にある数学的帰納法による証明方法の説明は次の通りです。

自然数 n に関する事柄 P が，すべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の 2 つのことを示す。
(1) $n=1$ のとき P が成り立つ。
(2) $n=k$ のとき P が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも P が成り立つ。

すべての自然数 n について成り立つことを示すために，$n=1$ の場合を示して，$n=2$ の場合を示して $\cdots$ と，一つ一つの場合を証明することは，自然数が無数にあることから不可能です。一方，数学的帰納法の証明では，(1),(2) の 2 つだけ示せば，無数にあるすべての自然数について証明したことになってしまうことに，何かすっきりしない部分を感じる人が多いようです。

自然数 $1, 2, 3, \cdots$ とはどんな数でしょうか。よく知っている数のはずですが，きちんと定義するにはどうしたらよいでしょう。自然数を次の 2 つの条件をみたす数の集合と定義する方法があります。

(1+) 1 は自然数
(2+) 自然数に 1 を足した数も自然数

1 から始めて順に 1 を足していくことで，$1, 2, 3, \cdots$ と，いつも自然数とよんでいる数がすべて得られることがわかると思います。たった 2 つの条件を決めておけば，無数にある自然数が得られるということです。

この 2 つの条件 (1+)(2+) は数学的帰納法で示すべき 2 つのこと (1)(2) と合致しています。条件 (2+) をていねいに言うと，「すでに自然数だとわかっているどんな数をもってきたときにでも，その数に 1 を足した数を自然数とする」と言っています。これを (2) では，「どんな番号であっても $n=k$ のとき S が成り立っていれば，その事実を用いて次の番号 $n=k+1$ のときも S が成り立つ」ことを示すよう求めているのです。

数学的帰納法は自然数に関する事柄を証明するためのものですから，自然数の定義と対比させ，さらに無数にあるものを 2 つの条件で表現しようとするものだと考えると，証明方法を理解するのにつながると思います。

次に $k, k+1$ の両方を仮定しなければならない場合についてです。問題を見たときに気が付き易いのは，隣接 3 項間漸化式が使われている場合です。フィボナッチ数列 : $a_0 = 0$, $a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, (n \geqq 0)$ のように，直前 2 項を参照していることがわかれば，$k, k+1$ の両方を仮定する問題である可能性があります。また，n が偶数と奇数とで異なる式を使っているような場合も可能性ありです。条件 (2) を示すとき，次の番号を示すのに，直前の番号だけでは示せない，さらに前の番号の事実が必要となる場合に，数学的帰納法の拡張をすることになるのです。

海城生に答えます　〜答えの一案〜 H. H.

◆ 因数定理で代入する数の候補が $\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}} \cdots (*)$
である理由が不明

回答

まず因数定理を確認しておきます。

因数定理

x の多項式 $f(x)$ について，「$x-\alpha$ が $f(x)$ の因数 $\iff f(\alpha)=0$」

因数定理は高次の多項式を因数分解するときに役立つ道具ですが，定理は $f(\alpha)=0$ となる α の値が見つかれば因数分解できることを言っているだけです。

α の値は，無理数や複素数にもなり得るので，闇雲に $f(x)$ に数を代入して探すようなことはしません。

計算しやすい整数か有理数に絞り，代入して式の値が 0 になるか試していきます。

このとき，効率よく有理数 (整数) α の値を見つけるために使われるのが冒頭の $(*)$ で表される数です。

この形の数は，次の性質から示されるように，$f(\alpha)=0$ となる可能性がある有理数です。

性質

係数がすべて整数の多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ について，
$f\left(\dfrac{q}{p}\right)=0$ ならば，p は a_n の約数，q は a_0 の約数である。ただし，$\dfrac{q}{p}$ は既約分数とし，約数には負の約数も含めるものとする。

「証明」

仮定より，$f\left(\dfrac{q}{p}\right)=a_n\left(\dfrac{q}{p}\right)^n+a_{n-1}\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\dfrac{q}{p}\right)+a_0=0$

両辺に p^n をかけて分母をはらうと，$a_nq^n+a_{n-1}pq^{n-1}+\cdots+a_1p^{n-1}q+a_0p^n=0$

左辺で q を含む項をまとめ，含まない項を右辺に移項する。

$q(a_nq^{n-1}+a_{n-1}pq^{n-2}+\cdots+a_1p^{n-1})=-a_0p^n$

左辺は q の倍数だから右辺も q の倍数になる。

ここで，p と q は互いに素であるから，a_0 が q の倍数，つまり，q は a_0 の約数である。

p について同様にして，

$p(a_{n-1}q^{n-1}+\cdots+a_1p^{n-2}q+a_0p^{n-1})=-a_nq^n$

と変形すれば，p は a_n の約数であることがわかる。■

この性質から，α が $f(\alpha)=0$ を満たす有理数であるための必要条件が $(*)$ の形の有理数であることになります。($(*)$ は十分条件ではありません。$f(\alpha)=0$ となる有理数が存在しないこともあります。) 因数定理を使って解く因数分解の問題では，多項式の係数がすべて整数になっていることが多く，$(*)$ の形の整数および有理数を順に代入して，$f(\alpha)=0$ となる α を求めていきます。

海城生に答えます　～答えの一案～　　K. Y.

◆ 因数分解（根本，高次などの難しいものまで）がよく分からない

回答

根本からではなく，高次の因数分解の初級の問題として，次の因数分解を考えましょう。

$$P = x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a$$

x については 3 次ですが，文字 a については 1 次なので，a で整理します。

$$P = -(x^2 - 3x + 2)a + x^3 - 3x^2 + 2x$$

ここで，x の 2 次式，3 次式を因数分解すると，

$$P = -(x-1)(x-2)a + x(x-1)(x-2)$$

となり，共通因数 $(x-1)(x-2)$ が見つかり，

$$P = (x-1)(x-2)(-a+x)$$

と因数分解できます。さらに，文字の順番も考えて，

$$P = -(x-1)(x-2)(x-a)$$

とすれば，因数分解の完成です。

このように，3 次式以上の因数分解では，最低次数の文字について整理すると共通因数がみつかることがあります。

次に，3 文字の 3 次式

$$Q = a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$$

を因数分解してみましょう。

今度は，a, b, c それぞれについて 3 次式です。最も次数の低い文字が決まりません。

この場合は，どの文字で整理してもいいのです。そこで，c について整理してみましょう。

$$\begin{aligned} Q &= a^3b - a^3c + b^3c - ab^3 + (a-b)c^3 \\ &= (a-b)c^3 + b^3c - a^3c + a^3b - ab^3 \\ &= (a-b)c^3 + (b^3 - a^3)c + ab(a^2 - b^2) \end{aligned}$$

ここで，公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ を用いると，

$$Q = (a-b)c^3 - (a-b)(a^2+ab+b^2)c + ab(a+b)(a-b)$$

となって，共通因数 $a-b$ が見つかります。続けて変形して，

$$Q=(a-b)\{c^3-(a^2+ab+b^2)c+ab(a+b)\}$$

中括弧の中の文字の最も次数の低いものは，$a,\ b$ ですから，a について整理すると，

$$\begin{aligned}Q &= (a-b)(c^3-a^2c-abc-b^2c+a^2b+ab^2)\\ &= (a-b)\{(b-c)a^2+a(b^2-bc)+c^3-b^2c\}\\ &= (a-b)\{(b-c)a^2+(b-c)ba-(b+c)(b-c)c\}\end{aligned}$$

となり，次の共通因数 $b-c$ が見つかります。さらに，続けて変形して，

$$Q=(a-b)(b-c)\{a^2+ba-(b+c)c\}$$

となるので，今度は b で整理して，

$$\begin{aligned}Q &= (a-b)(b-c)(a^2+ba-bc-c^2)\\ &= (a-b)(b-c)\{(a-c)b+a^2-c^2)\}\\ &= (a-b)(b-c)\{(a-c)b+(a+c)(a-c)\}\end{aligned}$$

となり，次の共通因数 $a-c$ が見つかります。最後に，

$$\begin{aligned}Q &= (a-b)(b-c)(a-c)\{b+(a+c)\}\\ &= (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)\end{aligned}$$

とすれば因数分解の完成です。

　ここで，$a\to b\to c$ の順に循環させて文字を書く習慣があることを紹介しておきましょう。

　この流儀で書き換えると，$a-c=-(c-a)$ となるので，

$$Q=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

と書きます。問題集や参考書の解答はこのように直してあるのが普通です。

　2 つの例で因数分解を練習してきましましたが，最も低い次数の文字で整理するという方針で変形すると共通因数がみつかるということがわかったでしょうか。

　この他にも，x の 4 次式で

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

という変形をして因数分解をする方法など，いろいろな変形をして因数分解する方法があります。興味をもって調べて，いろいろなタイプの因数分解に挑戦してみて下さい。

海城生に答えます　〜答えの一案〜

K. M.

◆ 一次分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ $(ps-qr\neq 0)$ の解き方がよくわからない

回答

一次分数型漸化式の解法は，比をとるものや行列の n 乗を援用するものなどがあり，そのどれもが深い背景をもち，興味深いものです。

その一方で，敷居が高いと考える生徒が少なくないようで，例えば，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$, $a_1=1\cdots$ ①　のようなタイプが解けないと嘆く高校生は少なくありません。とりわけ，背景が深いだけに，“解法の必然性”を理解できず，“その場しのぎの解法の暗記”に終始してしまっていることが多いように思われます。

とは言うものの，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+3}$, $a_1=2\ \cdots$ ② のようなタイプは解けるようです。

確かに，このタイプであれば，$a_n\neq 0$ (for all n) を示し，両辺で逆数をとれば容易に解けるからでしょう（ ② の解は，$a_n=\dfrac{2^n}{3^n-2^n}$）。

本稿では，

② が容易に解けるなら ① も容易に解ける

解法を示しましょう。その背景は，一次分数関数についてのごくごく簡単な性質です。

一般に，

> 一次分数関数 $y=\dfrac{px+q}{rx+s}$ $(ps-qr\neq 0)$ は，平行移動によって $Y=\dfrac{kX}{lX+m}$ $(km\neq 0)$ と変形できる

ことは分かると思います。

そのための平行移動のさせ方は無数にありますが，一例として $x-\alpha=X$, $y-\alpha=Y$ としてみましょう。例えば、$y=\dfrac{x-2}{x+4}\cdots$ ③　であれば，$Y+\alpha=\dfrac{X+\alpha-2}{X+\alpha+4}\Leftrightarrow Y=\dfrac{(1-\alpha)X+(-\alpha^2-3\alpha-2)}{X+\alpha+4}$ なので，α として，$-\alpha^2-3\alpha-2=0\Leftrightarrow\alpha^2+3\alpha+2=0$ の解である -1 または -2 を採ればよいことが分かります。例えば，$\alpha=-1$ とすれば，$Y=\dfrac{2X}{X+3}\cdots$ ④　とできるわけです。

ここで，① と ③，② と ④ を比べてみてください。そうです，この平行移動は，

① の解法に通ずる

と言えるのです。具体的に示してみましょう。

$a_{n+1}=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ は，$a_n+1=b_n$ とおくことで，$b_{n+1}=\dfrac{2b_n}{b_n+3}$ と変形できます。加えて，α の“出所”は，

$$\begin{aligned}\alpha^2+3\alpha+2=0 &\Leftrightarrow \alpha^2+3\alpha+2+\alpha=\alpha\\ &\Leftrightarrow \alpha(\alpha+4)=\alpha-2\\ &\Leftrightarrow \alpha=\frac{\alpha-2}{\alpha+4}\end{aligned}$$

から分かるように，

a_n，a_{n+1} をともに α に置き換えてできる方程式の解

なのです。

以上をまとめておきます：

一次分数型漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ $(ps - qr \neq 0)$ の解法の一例：

I.　方程式 $\alpha = \dfrac{p\alpha + q}{r\alpha + s}$ を解き，

II.　① で得られる α（2 つある場合はどちらもよい）に対して，$a_n - \alpha = b_n$ とおくと，

III.　$b_{n+1} = \dfrac{kb_n}{lb_n + m}$ $(km \neq 0)$ の形に変形される．

なかには，

“また新たな解法を覚えなければならないのか…”

と嘆息を漏らす人がいるかもしれませんが，思えば，二項間漸化式の基本形である $a_{n+1} = pa_n + q$ $(p \neq 1)$ の解法の手順も，

a_n, a_{n+1} をともに α に置き換えてできる方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を解くことがスタートで，

$a_n - \alpha = b_n$ とおいて変形（$b_{n+1} = pb_n$）させて解いた

のですから，

新たな解法どころか，これまでの解法がそのまま利用できる

ことが理解されることでしょう。

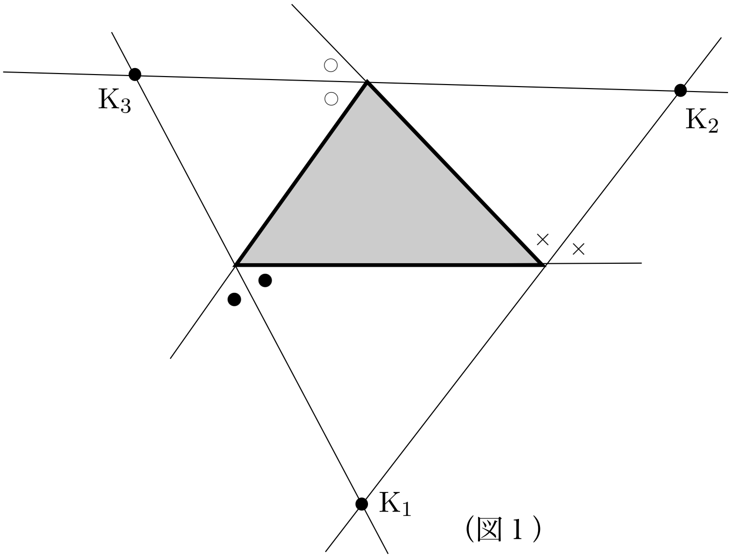
最後に，① の答を書いておきます：$a_n = \dfrac{2^{n+1} - 3^n}{3^n - 2^n}$

海城生に答えます　～答えの一案～ M. K.

◆ 三角形の傍心とはなにか？

回答

三角形の傍心とは，**“外角の二等分線の交点”**として定義されます。よって，全部で**3 点存在**します（下図の K_1, K_2, K_3 ）：

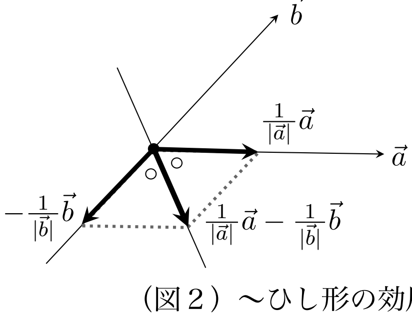


（図 1 ）

ここでは，普段の学習で文字通り“傍ら”におかれがちなこの三角形の傍心を，以下のように具体例を用いて，その“位置ベクトルをつくる”ことを通して定着させましょう。

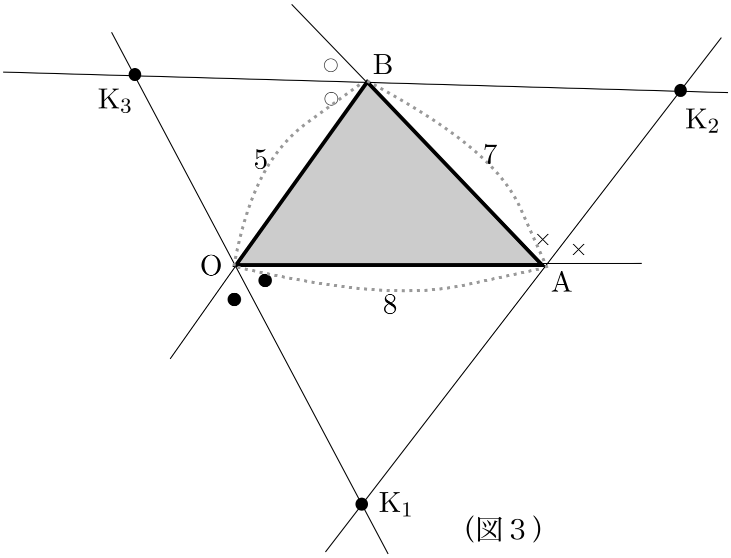
（例）$\mathrm{OA}=8,\ \mathrm{AB}=7,\ \mathrm{OB}=5$ である $\triangle\mathrm{OAB}$ において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．また，$\triangle\mathrm{OAB}$ の傍心を $\mathrm{K}_1,\ \mathrm{K}_2,\ \mathrm{K}_3$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OK_1}},\ \overrightarrow{\mathrm{OK_2}},\ \overrightarrow{\mathrm{OK_3}}$ をそれぞれ，$\vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表してみましょう．

解答するにあたり，傍心は“角の二等分線”が関わるので，**“ひし形”を想起**しましょう。**“単位ベクトルの利用”**がカギとなります。



（図 2 ）～ひし形の効用～

（図１）と同様に，$\triangle$OAB の傍心をそれぞれ K_1, K_2, K_3 とすると，



（図３）

（図３）において，

$$\overrightarrow{\mathrm{OK_1}} = s\left\{\frac{1}{8}\overrightarrow{a} + \frac{1}{5}(-\overrightarrow{b})\right\}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OK_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AK_1}} = \overrightarrow{a} + t\left\{\frac{1}{8}\overrightarrow{a} + \frac{1}{7}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})\right\}$$

$$\therefore s\left\{\frac{1}{8}\overrightarrow{a} + \frac{1}{5}(-\overrightarrow{b})\right\} = \overrightarrow{a} + t\left\{\frac{1}{8}\overrightarrow{a} + \frac{1}{7}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})\right\}$$

ここで，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は“一次独立”なので，$\begin{cases} \dfrac{1}{8}s = 1 - \dfrac{1}{56}t \\ -\dfrac{1}{5}s = \dfrac{1}{7}t \end{cases}$ $\quad\therefore \begin{cases} s = 10 \\ t = -14 \end{cases}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OK_1}} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ となります．

同様にして，以下を得ます．求めてみてください．

$$\overrightarrow{\mathrm{OK_2}} = \frac{5}{6}\overrightarrow{a} + \frac{4}{3}\overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OK_3}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{4}{5}\overrightarrow{b}$$

海城生に答えます　～答えの一案～　　O. Y.

◆ $\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b},\ 0<s+t<1$ が何を意味しているのか不明

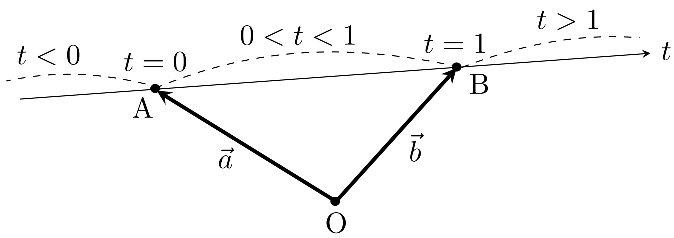
回答

$\vec{a},\vec{b}$ をそれぞれ位置ベクトルとする点を A, B とします．２点 A, B を通る直線は，点 A を通り $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとする直線なので，直線上の点を $\mathrm{P}(\vec{x})$ とすると，実数 t を用いて，

$$\vec{x}=\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\quad\cdots(*)$$

と表すことができます．

まず，この t の意味を考えてみましょう．$t=0$ のときは，$\vec{x}=\vec{a}$ より点 A になり，$t=1$ のときは，$\vec{x}=\vec{b}$ より点 B になります．これは式の作り方から当たり前です．点 A を始点にして，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の t 倍だけ移動した点が P ですので，$(t=)\,0$ 倍のとき点 A に，$(t=)\,1$ 倍のとき点 B になるということです．



このように，t は直線上に，点 A に $t=0$ が，点 B に $t=1$ がくるように目盛りを入れた状態，つまり，直線 AB に t 座標を入れた状態とみることができます．

次に，式 $(*)$ において，$s=1-t$ としてみます．すると，

$$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b},\quad s+t=1$$

となります．式自体は $(*)$ と同値ですので直線 AB を表す式なのですが，表現が変わると式のイメージが変わるのが不思議ですね．

先程は t の１文字だったので，直線に目盛りを入れた状態に見えました．今回は s と t の２文字なので，なんとなく平面のように感じますよね．まさに，その感覚は正しい！ 本質をついています．

わかりやすくするために，しばらくの間，次のように少し文字を変えてみましょう．

$$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b},\quad x+y=1$$

ここで，式「$x+y=1$」を見ると，多くの人は直線をイメージするでしょう．ただ，これは xy 座標平面の話で，ベクトル $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とは関係ないのではと疑問に思うかもしれません．ところが，次のように考えれば「同じ」ということがわかります．

まず，特別なケースを考えてみましょう．$\vec{a}=(1,\,0)$, $\vec{b}=(0,\,1)$ の場合，つまり，**$\vec{a}$ を x 軸方向, $\vec{b}$ を y 軸方向** の単位ベクトルの場合です．すると，$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}=x(1,\,0)+y(0,\,1)=(x,\,y)$ となり，普通の xy 平面の座標になります．したがって，この場合は，$x+y=1$ はまさに直線 $x+y=1$ を表すことがわかります．

次に，一般の場合を考えます．ポイントは，「$\vec{a}$ を x 軸方向，$\vec{b}$ を y 軸方向に」と考えたところを逆転の発想で，**$\vec{a}$ 方向に x 軸，$\vec{b}$ 方向に y 軸** と考えることにあります．

つまり，$x\vec{a}+y\vec{b}$ とは，$\vec{a}$ 方向に x 軸をとり，$\vec{b}$ 方向に y 軸をとる，一般には $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直ではないので，斜めの座標軸（斜交座標）ができることになります．

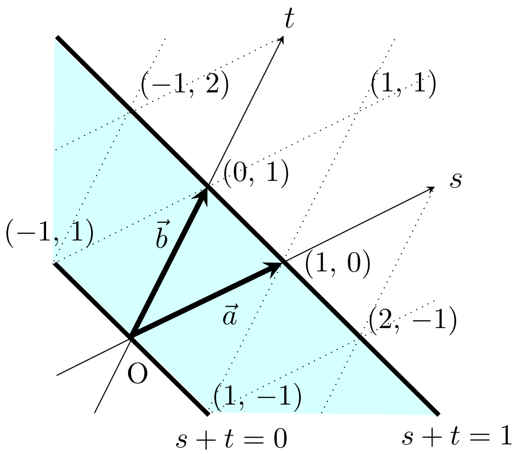
この座標で $(1,\,0)$ とは $x=1,\,y=0$ なので，$\vec{p}=1\vec{a}+0\vec{b}=\vec{a}$，点 A となり，$(0,\,1)$ とは $x=0,\,y=1$ なので，$\vec{p}=0\vec{a}+1\vec{b}=\vec{b}$，つまり，点 B となるので，$x+y=1$ は 2 点 A, B を通る直線，つまり，直線 AB をあらわすことがわかります．

さて，文字を，$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b},\quad s+t=1$ と戻しましょう．（下の図を参照）．今までの話をまとめると，

「$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}$ は，２つのベクトル $\vec{a},\vec{b}$ 方向に軸をとった，st 平面を考えていることになり，その st 平面上で，式 $s+t=1$ は直線を表している」

ということです．

以上の話を踏まえると，本質問の「$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b},\ 0<s+t<1$ が意味しているもの」ですが，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ でつくった st 平面で考えたとき，直線 $s+t=0$ と直線 $s+t=1$ に挟まれた図の色の付いた部分を表す式であることがわかりますよね．



海城生に答えます　～答えの一案～

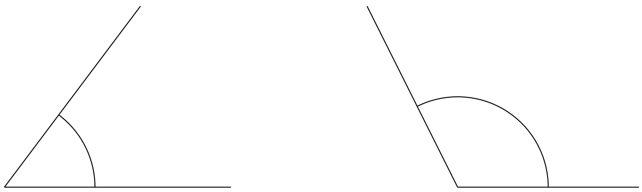
T.S.

◆ 弧度法がよくわからない

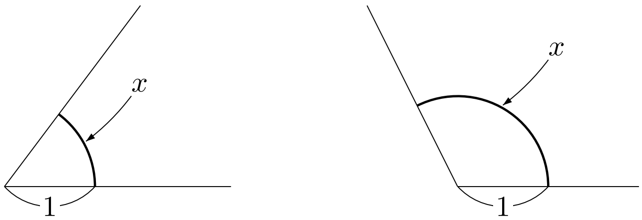
回答

漠然とした質問ですが，おそらく「弧度法の定義がしっくりこない」ということなのでしょうか．

平面幾何において，角を下のような弧で指し示すことが度々あったと思います．



弧度法の発想は「角の大きさをこの弧の長さで表す」ということです．つまり，下図の弧の長さ x を角度 x[rad] を定義するのです．



例えば，1 周の $\dfrac{1}{6}$ の角度を度数法，弧度法でそれぞれ表してみると次のようになります．

〔度数法〕　$360 \times \dfrac{1}{6} = 60^\circ$

〔弧度法〕　$1 \times 2 \times \pi \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}\pi[\mathrm{rad}]$

計算の手続きとしてはほとんど変わりません．1 周を 360° としているか 2π としているかの違いだけです．

小学校の頃から度数法に慣れてしまっているので，はじめて弧度法を知ったときは違和感があったかもしれませんが，「1 周を 360° と定める度数法[1]」よりも，「1 周を半径 1 の円周の長さと定める弧度法」のほうが自然だと私は思います．みなさんはどうでしょうか．

---

[1] “360” はどこからきた数字なのでしょうか？

海城生に答えます　～答えの一案～　　　K.S

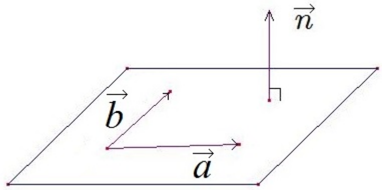
◆ 外積の公式がよくわからない．

回答

$\overrightarrow{0}$ でなく，互いに平行でない２つのベクトル

$$\overrightarrow{a} = (x_1,\, y_1,\, z_1), \quad \overrightarrow{b} = (x_2,\, y_2,\, z_2)$$

において，



$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ の双方に垂直なベクトルの１つは

$$\overrightarrow{n} = (y_1z_2 - z_1y_2,\ z_1x_2 - x_1z_2,\ x_1y_2 - y_1x_2) \quad (\neq \overrightarrow{0})$$

と表せる．

$\overrightarrow{n} = (a,\, b,\, c)$ とおく．$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{b}$ であるから

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a} = 0, \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

よって，

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 &= 0 \cdots ① \\ ax_2 + by_2 + cz_2 &= 0 \cdots ② \end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ であるから，a, b, c のうち少なくとも１つは 0 でない．

そこで，$c \neq 0$ の場合を考える．

$$\begin{aligned} ① \times y_2 - ② \times y_1 \quad &: \quad a(x_1y_2 - y_1x_2) + c(y_2z_1 - y_1z_2) = 0 \cdots ③ \\ ① \times x_2 - ② \times x_1 \quad &: \quad b(y_1x_2 - x_1y_2) + c(z_1x_2 - x_1z_2) = 0 \cdots ④ \end{aligned}$$

(i) $x_1y_2 - y_1x_2 \neq 0$ のとき

③ より

$$a = \frac{y_1z_2 - z_1y_2}{x_1y_2 - y_1x_2}\, c$$

④ より

$$b = \frac{z_1x_2 - x_1z_2}{x_1y_2 - x_2y_1}\, c$$

したがって

$$\begin{aligned}(a,\, b,\, c) &= \left(\frac{y_1z_2 - z_1y_2}{x_1y_2 - y_1x_2}\,c,\ \frac{z_1x_2 - x_1z_2}{x_1y_2 - x_2y_1}\,c,\ c\right) \\ &= \frac{c}{x_1y_2 - y_1x_2}(y_1z_2 - z_1y_2,\, z_1x_2 - x_1z_2,\, x_1y_2 - y_1x_2)\end{aligned}$$

ゆえに，$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の双方に垂直なベクトルの 1 つは

$$\overrightarrow{n} = (y_1z_2 - z_1y_2,\ z_1x_2 - x_1z_2,\ x_1y_2 - y_1x_2)$$

と表せる．

(ii) $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$ のとき

$$(x_1,\, y_1) \,/\!/\, (x_2,\, y_2)$$

$x_2 = kx_1$ とおくと

$$(x_2,\, y_2) = (kx_1,\, ky_1)$$

また，③ より

$$c(y_2z_1 - y_1z_2) = 0$$

仮定より

$$\begin{gathered} y_2z_1 - y_1z_2 = 0 \\ \therefore (y_1,\, z_1) \,/\!/\, (y_2,\, z_2) \\ \therefore (y_2,\, z_2) = (ky_1,\, kz_1) \\ \therefore (x_2,\, y_2,\, z_2) = (kx_1,\, ky_1,\, kz_1) \\ \therefore \overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a} \end{gathered}$$

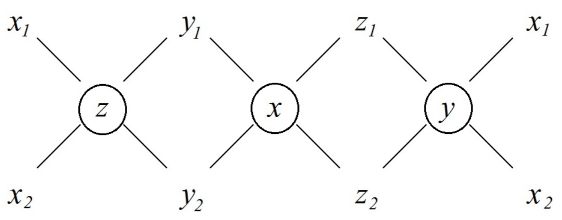
これは仮定に反する．よって，この場合は考える必要がない．

a または b が 0 でない場合も同様にして，$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の双方に垂直なベクトルの 1 つは

$$\overrightarrow{n} = (y_1z_2 - z_1y_2,\, z_1x_2 - x_1z_2,\, x_1y_2 - y_1x_2)$$

と表せる． ■

$\overrightarrow{n} = (x,\, y,\, z)$ とすると，下の図のように x_1, y_1, z_1, x_1 と x_2, y_2, z_2, x_2 を 2 列に並べ，たすき掛けをすることで，上の結果が得られる．



海城生に答えます　～答えの一案～　K.S

◆ なぜ $-\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ で面積が求まるのか.

回答

まずは公式の証明から始めましょう.

公式　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

（証明）

$(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\} = (x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)$. ゆえに,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \qquad \square\end{aligned}$$

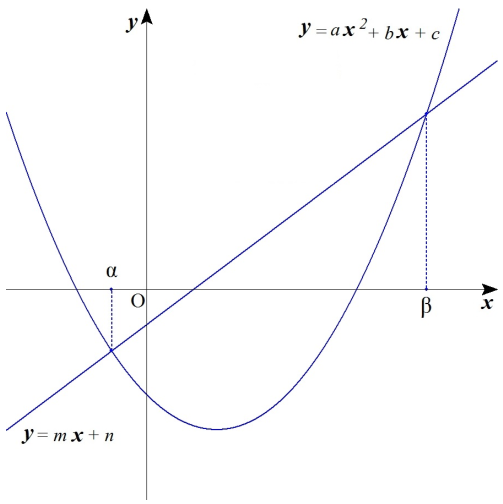
この公式を用いて

(i) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ で囲まれた部分の面積

(ii) 放物線 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$ と放物線 $y=a_2x^2+b_2x+c_2$ で囲まれた部分の面積

をそれぞれ求めてみましょう.

(i) 放物線 $y=ax^2+bx+c \cdots$ ① と 直線 $y=mx+n \cdots$ ② で囲まれた部分の面積 S を求めましょう.



まず, ①, ② を連立方程式とみなし, y を消去すると $ax^2+bx+c=mx+n$ より, $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0 \cdots$ ③

③ の 2 つの解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと ③ は $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と表すことができ, α, β は ①, ② の交点の x 座標となる.

このとき, 積分区間は $[\alpha, \beta] \cdots$ ④

次に, ① を $y=f(x)$, ② を $y=g(x)$ とすると

$$
\begin{aligned}
|f(x)-g(x)| &= |ax^2+bx+c-(mx+n)| = |ax^2+(b-m)x+(c-n)| \\
&= |a(x-\alpha)(x-\beta)| = |a||(x-\alpha)(x-\beta)| \cdots ⑤
\end{aligned}
$$

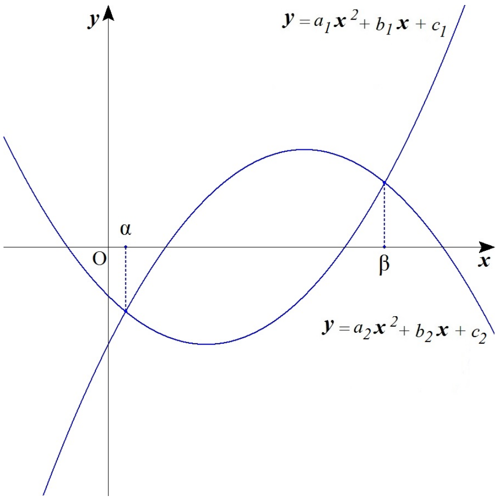
④, ⑤ より $S=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx=|a|\int_{\alpha}^{\beta}|(x-\alpha)(x-\beta)|\,dx$

ここで，区間 $[\alpha,\beta]$ において，$(x-\alpha)(x-\beta)<0$

したがって，面積 S は

$$S=-|a|\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-|a|\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(ii) 放物線 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$ $\cdots$ ⑥ と放物線 $y=a_2x^2+b_2x+c_2$ $\cdots$ ⑦ で囲まれた部分の面積 S を求めましょう.



まず，⑥,⑦ を連立方程式とみなし，y を消去すると $a_1x^2+b_1x+c_1=a_2x^2+b_2x+c_2$ より，$(a_2-a_1)x^2+(b_2-b_1)x+(c_2-c_1)=0$ $\cdots$ ⑧

⑧ の 2 つの解を α, β $(\alpha<\beta)$，$a=a_2-a_1$ とおくと ⑧ は $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と表すことができ，α, β は ⑥,⑦ の交点の x 座標となる.

このとき，積分区間は $[\alpha,\beta]$ $\cdots$ ⑨

次に，⑥ を $y=f(x)$，⑦ を $y=g(x)$ とすると

$$
\begin{aligned}
|f(x)-g(x)| &= |a_2x^2+b_2x+c_2-(a_1x^2+b_1x+c_1)| \\
&= |(a_2-a_1)x^2+(b_2-b_1)x+(c_2-c_1)| \\
&= |a(x-\alpha)(x-\beta)| = |a||(x-\alpha)(x-\beta)| \cdots ⑩
\end{aligned}
$$

⑨, ⑩ より $S=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx=|a|\int_{\alpha}^{\beta}|(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

ここで，区間 $[\alpha,\beta]$ において，$(x-\alpha)(x-\beta)<0$

したがって，面積 S は

$$S=-|a|\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-|a|\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$