高校生でも

dx, dy の 微 積 分

公式は覚えなくても導ける！

海城中学高等学校

小澤　嘉康

はじめに

本稿は２０２２年度の高校２年理系で行った微分積分の授業で，教科書の内容に付け加えた部分を再編集した授業の記録である．

高校の微積分では「微分する」や「微分係数」などの「微分」の周辺の用語は登場するが，「微分」そのものは出てこない．敢えて出さないという方針である．それは初学生には「微分」の概念が捉えにくく，登場させることで混乱を招くことを心配してのことである．しかしながら，本来そこにあるべきの「微分」を隠した状態で，迂回した議論を進めることになり，一本の筋道が見えづらくなっていることも事実である．たとえば「微分」の「係数」である「微分係数」を省略のつもりで「微分」と言ってしまうなどの誤った認識も少なくないが，そもそも「微分」そのものの存在を知らなければ仕方のないことかもしれない．

授業は基本は教科書通りに進めているが，「微分」を強調した方が一本の道筋で説明できると考えるところでは，「微分」を敢えて登場させた．はじめは「微分」の扱いに戸惑いがあるかもしれないが，慣れてしまえば雰囲気が掴め，理解も深まると考える．例えば，微積分の多くの公式を暗記するのではなく実感を持って理解することができ，万が一公式を忘れたとしても，自分で導き直すことができるかもしれない．（できるようになって欲しいという期待が大きい）

姉妹編として「高校生でも（なんちゃって）$\varepsilon-\delta$の極限」がある．これは，極限を教科書的な「限りなく大きくや限りなく近づく」だけでなく「誤差」や「精度」を強調した「$\varepsilon-\delta$もどき」の考え方を紹介した授業記録であるが，次の機会で著す予定である．

いつものことながら，原稿の提出が遅くなってしまい，研究集録委員会の皆様に多大なるご迷惑をおかけしたことをこの場を借りてお詫び申し上げる．

2023.3.31　小澤　嘉康

第1章　微分

1.1　接線

【例題】 $2x^2+y^2=4$ 上の点 $\left(1,\,\sqrt{2}\right)$ における接線を求める

① 教科書的解き方

$2x^2+y^2=4$ より両辺を x で微分して，$4x+2yy'=0$ ．$\therefore\, y'=-\dfrac{2x}{y}$ ．

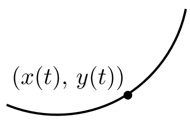
したがって，点 $\left(1,\,\sqrt{2}\right)$ における接線の傾きは，$y'\big|_{(x,\,y)=\left(1,\,\sqrt{2}\right)}=-\sqrt{2}$ ．

よって，接線の方程式は，$y-\sqrt{2}=-\sqrt{2}(x-1)$ ，つまり，$y=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$ ．

② 通っぽい工夫（受験で使っても大丈夫）

アイデアは，関数 $y=f(x)$ は，y は x に従属するが，方程式 $F(x,\,y)=0$ では x と y に主従の関係はなく対等のはず.

なので，パラメータ t を導入して，$t\begin{array}{l}\nearrow x\\ \searrow y\end{array}$ とみる．つまり，曲線上の点 $(x(t),\,y(t))$ とみる.

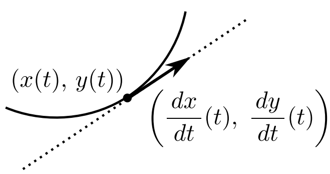


物理的には時刻 t における点の位置

$2x(t)^2+y(t)^2=4$ の両辺を t で微分すると，$2\cdot 2x(t)\dfrac{dx}{dt}(t)+2y(t)\dfrac{dy}{dt}(t)=0$ ．

ここで，接線の傾きは「 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ なので，・・・」としてもよいが，それでは x が主，y が従の束縛から逃れられていない.（そもそも傾きは，x の関数 y であることが前提）

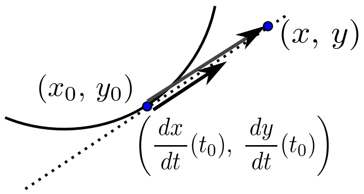
そこで，$\left(\dfrac{dx}{dt}(t),\,\dfrac{dy}{dt}(t)\right)$ の意味を考える.



位置 $(x(t), y(t))$ を時刻 t で微分しているので，物理的には **速度**，幾何的には **接ベクトル**，すなわち **接線の方向ベクトル**.

時刻 $t=t_0$ のときの点を $(x_0,\, y_0)$ とする．すなわち，$\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$ ．このときの接ベクトルは $\left(\dfrac{dx}{dt}(t_0),\, \dfrac{dy}{dt}(t_0)\right)$.

また，接線上の点 $(x,\, y)$ においては，



$$(x-x_0,\, y-y_0) \;/\!/\; \left(\frac{dx}{dt}(t_0),\, \frac{dy}{dt}(t_0)\right) \text{ が成り立つ.}$$

以上をふまえると，

$$2\cdot 2x(t)\frac{dx}{dt}(t) + 2y(t)\frac{dy}{dt}(t) = 0\ .$$

に $t=t_0$ を代入すると，

$$2\cdot 2x_0\frac{dx}{dt}(t_0) + 2y_0\frac{dy}{dt}(t_0) = 0\,.$$

そして，$\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$ が同じ次数の項しかない（同次式という）なので，

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = x - x_0, \quad \frac{dy}{dt}(t_0) = y - y_0,$$

を代入すると，

$$2\cdot 2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) = 0$$

となり，これが接線の方程式.

いま，$(x_0,\, y_0) = \left(1,\, \sqrt{2}\right)$ なので，

$$2\cdot 2\cdot 1(x-1) + 2\cdot\sqrt{2}\left(y-\sqrt{2}\right) = 0\,,$$

より，$\sqrt{2}x + y - 2\sqrt{2} = 0$ を得る.

③ さらに玄人っぽい工夫（高校生は答案には書いてはいけない）

パラメータ t は勝手においただけなので，s でも θ でも何でもよい.

「だったらあるつもりで書かなくてもいいじゃん」ということで，$2x^2+y^2=4$ をあるつもりのパタメータで微分すると，

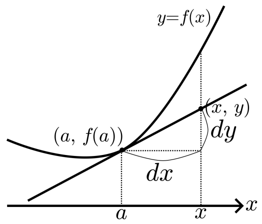
$$2\cdot 2xdx+2ydy=0\,.$$

接点を $(x_0,\,y_0)$ とするとき，x に x_0，y に y_0 を代入するとともに，$dx=x-x_0$，$dy=y-y_0$ なので，

$$2\cdot 2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)=0$$

と接線の方程式が求まる．

④ せっかくなので，微分 $\boldsymbol{dx=x-x_0}$，$\boldsymbol{dy=y-y_0}$ についてもう少し



- $y=f(x)$ の $x=a$ での両辺の微分は，$dy=f'(a)dx$

  なので，$f'(a)=\dfrac{dy}{dx}$ が傾きであることも納得.

- $x=a$ での接線の方程式は，$y-f(a)=f'(a)(x-a)\,.$

- $f'(a)$ は微分 dx の係数なので微分係数．この名称はごくごく自然.

  微分（名詞）を出さずに微分係数のみ登場させるからごちゃまぜになる.

- $y=f(x)$ と $z=g(y)$ の合成関数 $z=g\circ f(x)$ について.

  $dz=g'(y)dy,\quad dy=f'(x)dx$ より，$dz=g'(y)f'(x)dx$ である．これが，合成関数の微分公式の意味.

- 関数 $f(x)$ の微分は $df=f'(x)dx$ で，微分 df から f を求める演算を $\int$ で表すと，

  $f=\displaystyle\int df=\int f'(x)\,dx$ と見慣れた積分の公式になる．dx の存在理由が明確.

  dx は「積分終わりの記号」ではない！

- $x=x(t)$ のとき，$dx=x'(t)\,dt$ なので，

  $f=\displaystyle\int df=\int f'(x)\,dx=\int f'(x)x'(t)\,dt=\int f(x(t))x'(t)\,dx.$ これが置換積分の意味.

【例題】 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\,y_1)$ における接線の方程式を求める

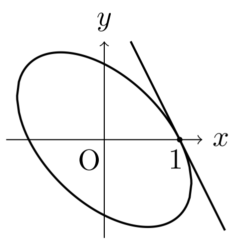
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ より，両辺の微分は，$\dfrac{2x}{a^2}dx+\dfrac{2y}{b^2}dy=0$ ．よって，$\dfrac{x}{a^2}dx+\dfrac{y}{b^2}dy=0$ ．
したがって，点 $(x_1,\,y_1)$ における接線は，$\dfrac{x_1}{a^2}(x-x_1)+\dfrac{y_1}{b^2}(y-y_1)=0$ ．点 $(x_1,\,y_1)$ は楕円上の点であることに注意すると，$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ ．

【例題】 他の２次曲線の接線の公式も導いてみる

放物線 $y^2=4px$
$2ydy=4pdx$ より，$y_1(y-y_1)=2p(x-x_1)$ ．$y_1y-y_1^2=2p(x-x_1)$ で，$y_1^2=4px_1$ より，$y_1^2=2p(x+x_1)$ ．
双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
$\dfrac{2x}{a^2}dx-\dfrac{2y}{b^2}dy=0$ より，$\dfrac{x_1}{a^2}(x-x_1)-\dfrac{y_1}{b^2}(y-y_1)=0$ ．
$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}$ で，$\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ より，$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ ．$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\text{ も同様}\right)$

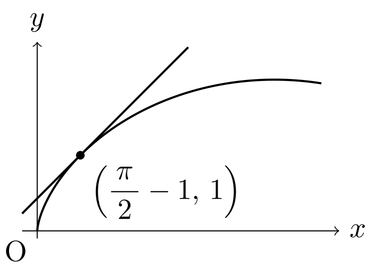
【例題】 一般の２次曲線でも

例えば $x^2+xy+y^2=1$（楕円）上の点 $(1,\,0)$ における接線



$2xdx+ydx+xdy+2ydy=0$ より，$2\cdot 1(x-1)+0(x-1)+1(y-0)+2\cdot 0(y-0)=0$ ．
よって，$2x+y=2$ ．

【例題】 サイクロイド (cycloid) $\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}$ の $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ での接線

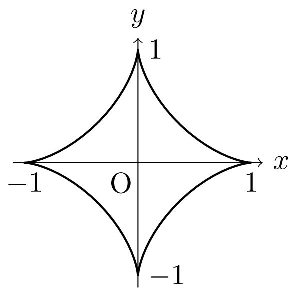


位置ベクトルを $\vec{p}$ とする．$\vec{p} = (\theta - \sin\theta,\ 1 - \cos\theta)$.
点 $\vec{p}$ における接線の方向ベクトル（＝接ベクトル＝速度ベクトル）$\vec{v}$ は,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{d\theta} = \left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right) = (1 - \cos\theta,\ \sin\theta)\ .$$

よって，接線は $\dfrac{x - (\frac{\pi}{2} - 1)}{1} = \dfrac{y - 1}{1}$ より $y = x - \dfrac{\pi}{2} + 2$.

【例題】 アステロイド (astroid) $\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}$



位置ベクトルを $\vec{p}$ とする．$\vec{p} = (\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$
点 $\vec{p}$ における接線の方向ベクトル（＝接ベクトル＝速度ベクトル）$\vec{v}$ は,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{d\theta} = \left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right) = (-3\cos^2\theta\sin\theta,\ 3\sin^2\theta\cos\theta)\,.$$

よって, 接線は $\dfrac{x - \cos^3\theta}{-3\cos^2\theta\sin\theta} = \dfrac{y - \sin^3\theta}{3\sin^2\theta\cos\theta}$. 整理して $\dfrac{x}{\cos\theta} + \dfrac{y}{\sin\theta} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$

1.2 接線の意味～高次近似へ

① 1 次近似

$f(x)$ が $x = a$ の周辺において，$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + O(2)$ と 1 次近似できたとする．
（$O(n)$ は $(x - a)^n$ 程度の誤差項）
$x = a$ を代入すると，$c_0 = f(a)$. ←これは 0 次近似
x で微分すると，$f'(x) = c_1 + O(1)$ より，$x = a$ を代入すると，$c_1 = f'(a)$.
したがって,

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x - a)$$

と 1 次近の式を得る．なお，これは接線の方程式.

② ２次近似

同様に，２次近似．$x=a$ の周辺において，$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+O(3)$ とおく．

$c_0=f(a)$.

$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)^2+O(2)$ より，$c_1=f'(a)$.

$f''(x)=2c_2+O(1)$ より，$c_2=\dfrac{1}{2}f''(a)$.

したがって，２次近似の式は，

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

となる．

③ ２次近似の意味

２次近似の各項の意味は，$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$

２次は曲がり具合なので，凹凸

１次は傾きなので，増減

０次は点なので，位置

④ そして高次近似へ

$f(x)$ が n 回微分可能（つまり $f^{(n)}(x)$ が存在する) とする

同様にすることで，$x=a$ の周辺において，

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(x-a)^n$$

となる．誤差は $O(n+1)$ つまり $(x-a)^{n+1}$ のオーダー．

これを テイラー (Taylor) 展開 という．

注：$n\to\infty$ で $=$ になるとは限らない．また，$=$ になった場合でも，一般には $x=a$ の限られた周辺でのみ成り立つ．

第 2 章　積分

2.1　授業の進め方

積分の構成方法は，教科書では

微分の逆演算としての不定積分

↓

定積分

↓

区分求積法

であるが，

Q．不定って何？
Q．なんで定積分で面積が求まるの？

という疑問が生じる．なので，授業では次のように逆にたどる．

まず，面積で定積分を定義

↓

積分区間が不定なので不定積分

↓

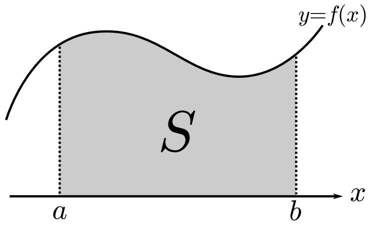
微分と積分の関係（微分積分学の基本定理）

Q．不定って何？	→	A．それは積分区間が不定だからです.
Q．なんで定積分で面積が求まるの？	→	A．それは定義です.

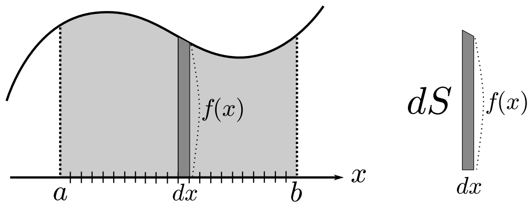
2.2　定義

① $\boldsymbol{f(x) \geqq 0}$ のとき

$a \leqq x \leqq b$ の部分の面積 S を考える.



区間 $[a, b]$ を細かく分割する．

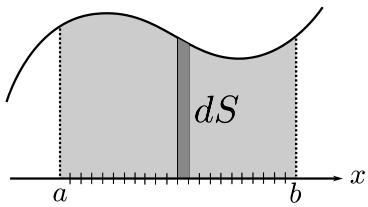


微小面積はほぼ長方形なので $\overset{\text{面積}}{dS} = \overset{\text{高さ}}{f(x)} \times \overset{\text{底辺}}{dx}$

面積 S は，微小面積 dS の a から b までの 無限和（連続和）なので，それを $\displaystyle\int_a^b$ で表すと，

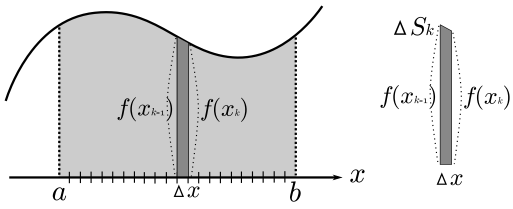
$$S = \int_a^b dS = \int_a^b f(x)\,dx$$

と面積を“**表す**”式が得られた．（“**求める**”ではない！）



② **積分を求める方法（その１）　具体的に頑張る**

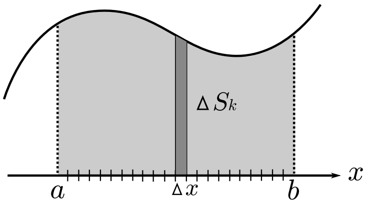
区間 $[a, b]$ を n 等分する．１つの幅は $\Delta x = \frac{b-a}{n}$．また，$a = x_0$, x_1, x_2, $\cdots$, $x_n = b$ とする．k 番目の短冊は $f(x_{k-1}) \fallingdotseq f(x_k)$ なので，面積 $\Delta S_k \fallingdotseq f(x_k)\Delta x$.



$$S \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

で，$n \to \infty$ のとき，$\fallingdotseq \to =$ となるので，

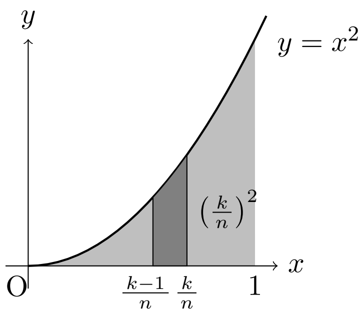
$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$



一方 $S=\int_a^b f(x)dx$ なので，$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}}_{\downarrow\ \int_a^b} f(x_k)\underbrace{\Delta x}_{\downarrow\ dx}=\int_a^b f(x)\,dx$ ． $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ より，積分区間は $[a,\,b]$ となる

これを教科書では「**区分求積法**」というが，実は単に計算しただけの式．なお，この和をリーマン (Reimann) 和といい，このように定義した積分をリーマン (Reimann) 積分という

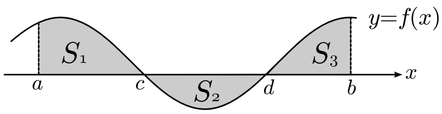
【例題】 $y=x^2$ の $[0,\,1]$ での面積



$\Delta S_k=\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{k^2}{n^3}$ より，$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}$.

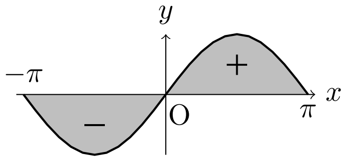
一方，$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}}_{\downarrow\ \int_0^1}\underbrace{\left(\frac{k}{n}\right)^2}_{\downarrow\ f(\frac{k}{n})}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\ \Delta x}=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$.

③ 一般の $\boldsymbol{f(x)}$ の場合

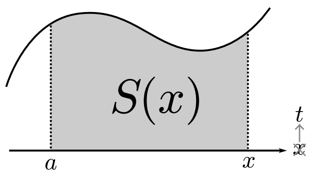


それぞれの面積を S_1, S_2, S_3 とする．面積なので，$S_1 > 0$, $S_2 > 0$, $S_3 > 0$ に注意．
また，$f(x) < 0$ の区間 $(c,\, d)$ では，高さが負なので，$\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx < 0$ より，$\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx = -S_2$.
したがって，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3$ となる．

【例題】 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = 0$



④ 不定って何？
積分区間の上端を x とする．つまり $[a,\, x]$ を考える．



$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

積分変数と，区間の変数が同じだとまぎらわしいので，積分変数を t にする
これが 不定積分 の正体．つまり，**積分区間が動く（定まらない）から「不定」**

厳密には区間 $[a,\, x]$ での積分なので，下端の a にも依存する

$$S_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{と書くべき}$$

↓

a はどこでもいいので省略

$$S(x) = \int^x f(t)\,dt$$

↓

積分変数が t なのがわずらわしいので，これを

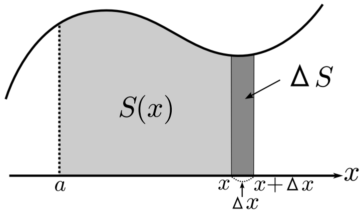
$$S(x) = \int f(x)\,dx$$

と書くことにする

$$\int f(x)\,dx = \int^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$$

すべて同じ　不定積分

⑤ 不定積分 $\boldsymbol{S(x)=\int_a^x f(t)\,dt}$ は 関数なので微分したらどうなる？



$$\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x) \fallingdotseq f(x)\Delta x \fallingdotseq f(x+\Delta x)\Delta x$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}S(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} \quad \left(= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\Delta x}{\Delta x}\right) = f(x)\ !! \\
\therefore \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt &= f(x)
\end{aligned}$$

微分積分学の基本定理

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$$

$$\downarrow$$

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は微分すると $f(x)$ になる関数.

これを **原始関数** という

※ $\displaystyle\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$ も同じ

$f(x)$ の原始関数（の一つ）を $F(x)$ とする．つまり，$F'(x)=f(x)$ とする．

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \quad となる$$

a はどこでもよいので，$\displaystyle\int_a$ や $F(a)$ を書くのはわずらわしいので，$\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)+C$ と書く．よって，原始関数 $F(x)$ を求めることが超大事！

⑥ 積分を求める方法（その２）　原始関数から求める

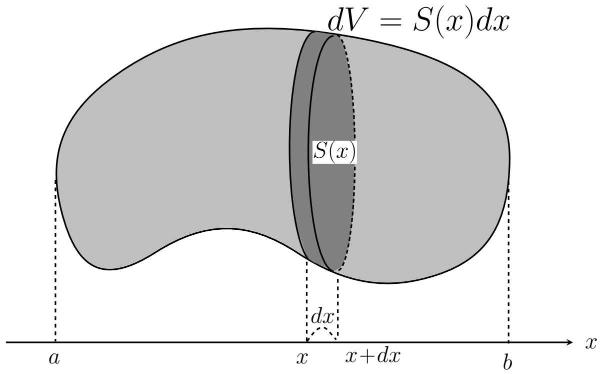
$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき，

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

2.3 区分求積・リーマン (Reimann) 和について

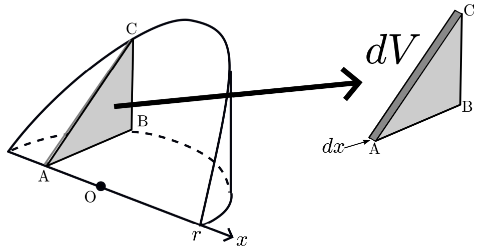
$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) && \text{① } \tfrac{1}{n} \text{ を出す．将来の } dx\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} && \text{② } \textstyle\sum \text{ で書く．将来の } \textstyle\int\\
&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx && \text{③ } \lim\textstyle\sum\to\int,\ \tfrac{1}{n}\to dx,\ \tfrac{k}{n}\to x.\ \text{積分区間は } \tfrac{k}{n} \text{ が動く範囲}\\
&=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2
\end{aligned}
$$

2.4 体積



$$V=\int_a^b dV=\int_a^b S(x)\,dx$$

【例題】 半径 r の円柱を，底面の直径を通り，底面とのなす角が 45° の平面で切ったときにできる立体の体積 V



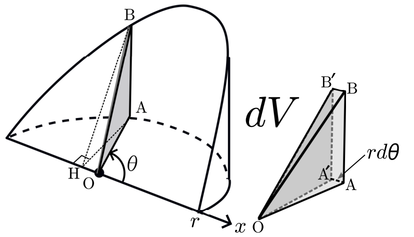
底面の直径に垂直な平面で切る． $dV = \triangle\mathrm{ABC}\,dx$
$\mathrm{A}(x,\,0)$ で $-r \leqq x \leqq r$． $\mathrm{B}\left(x,\,\sqrt{r^2-x^2}\right)$ より， $\mathrm{AB} = \sqrt{r^2-x^2}$ ．
$\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ より $\mathrm{BC} = \mathrm{AB}$ なので， $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC} = \dfrac{1}{2}(r^2-x^2)$.

$$\therefore dV = \triangle\mathrm{ABC}\,dx = \frac{1}{2}(r^2-x^2)\,dx\,.$$

したがって，

$$V = \int_{x=-r}^{r} dV = \int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2-x^2)\,dx = \frac{2}{3}r^3\,.$$

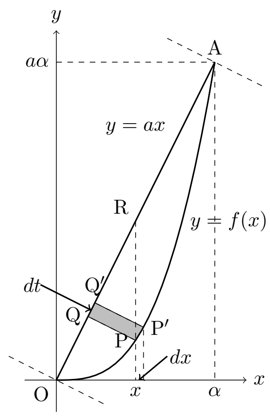
【例題】 の別解 回し切り オススメはしないが，気になる人がいると思うので...



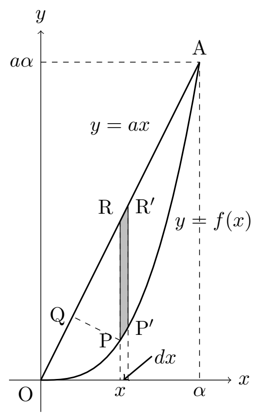
$dV = \triangle\mathrm{OAB}\,d\theta$ ではない！ dV は $\mathrm{ABB'A'}$ を底面とする四角錐である.
$0 \leqq \theta \leqq \pi$． $\mathrm{A}(r\cos\theta,\,r\sin\theta)$ で $\angle\mathrm{AHB} = 45^\circ$ より， $\mathrm{AB} = \mathrm{AH} = r\sin\theta$ ．（$\angle\mathrm{AOB}$ は 45° ではない）
$\mathrm{AA'} \fallingdotseq \mathrm{BB'} \fallingdotseq rd\theta$ ． 高さ $\fallingdotseq \mathrm{OA} = \mathrm{OA'} = r$ ． $\therefore dV = \dfrac{1}{3}r\sin\theta \times rd\theta \times r$ ．

よって， $V = \displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi} dV = \int_{0}^{\pi} \frac{r^3}{3}\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}r^3$ ．

2.5 斜軸回転体〜ハム積分ととんがりコーン積分について

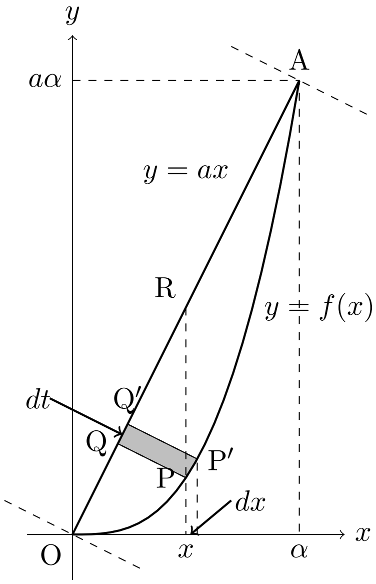


ハム積分



コーン積分

2.5.1　ハム積分について



まずはじめに，軸の端点において，軸に垂直な面からグラフがはみ出ていないかを確認する．
➞はみ出ていたら，外側から内側を引く
➞とんがりコーン積分なら回避できる

軸 OA で，点 O からの距離を t とする．
点 O は $t = 0$，点 A は $t = \sqrt{1+a^2}\,\alpha$.

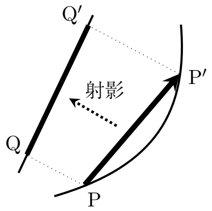
$dV = \pi \mathrm{PQ}^2\,dt$ より，
$V = \displaystyle\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} dV = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \pi \mathrm{PQ}^2\,dt$.

ポイント：① PQ の長さ，②実際は x で積分するので dt と dx の関係

① PQ の長さについて．
$\triangle$PQR は PQ : QR : RP $= 1 : a : \sqrt{1+a^2}$ より，

$$\mathrm{PQ} = \frac{\mathrm{PR}}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{ax - f(x)}{\sqrt{1+a^2}} .$$

② 次に dt と dx の関係 について．
$dt = \mathrm{QQ}'$ は $\overrightarrow{\mathrm{PP}'}$ を軸 OA に射影したものであることに注目する．



軸 OA の方向ベクトルは $(1,\,a)$ なので，単位方向ベクトルは

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right) .$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PP}'} = (dx,\,dy)$ で，$dy = f'(x)dx$ なので，

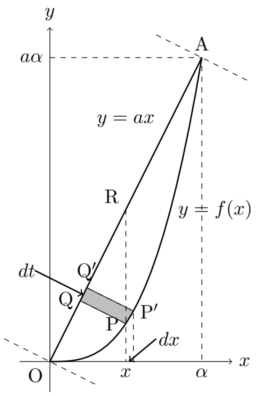
$$\begin{aligned} dt = \mathrm{QQ}' &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ \tfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)\cdot(dx,\,dy) \\ &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ \tfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)\cdot(dx,\,f'(x)dx) \\ &= \frac{1+af'(x)}{\sqrt{1+a^2}}dx . \end{aligned}$$

③したがって，

$$V=\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} dV=\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \pi \mathrm{PQ}^2\, dt=\int_0^{\alpha} \pi\left(\frac{ax-f(x)}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2 \cdot \frac{1+af'(x)}{\sqrt{1+a^2}} dx\ .$$

ハム積分の手順のまとめ

ポイント：① PQ の長さ，②実際は x で積分するので dt と dx の関係



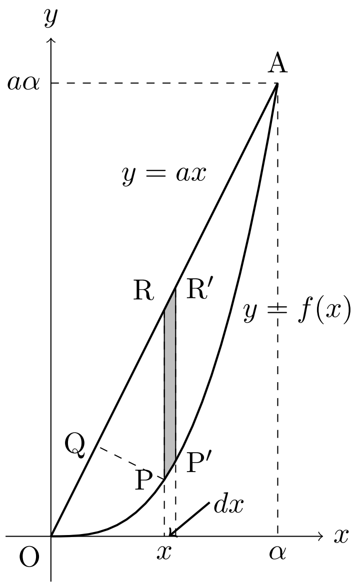
⓪ 軸の端点において，軸に垂直な面からグラフがはみ出ていないかを確認する．（→とんがりコーン）

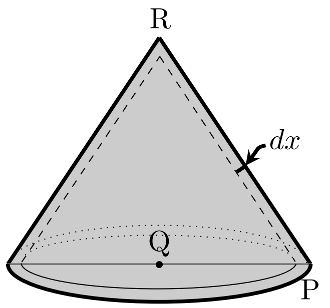
① PQ の長さは，△PQR の辺の長さの比から簡単に求まる．

② $dt=\mathrm{QQ}'$ は $\overrightarrow{\mathrm{PP}'}=(dx,\, dy)=(dx,\, f'(x)dx)$ を軸 OA に射影することで，これも簡単に求まる．

③ あとは，$V=\displaystyle\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} dV=\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \pi \mathrm{PQ}^2\, dt$ に代入して，こつこつ計算する．（地味に割と大変）

2.5.2　とんがりコーン積分について





ポイント：母線が RP，底面の半径が PQ，厚みが dx の円錐の側面を考える．これが dV

つまり，$dV=\pi \mathrm{RP}\cdot \mathrm{PQ}\, dx$ ということ．（→ 2.5.4 を参照）

$$V=\int_0^\alpha dV=\int_0^\alpha \pi\mathrm{RP}\cdot\mathrm{PQ}\,dx\ .$$

$\mathrm{PR}=ax-f(x)$ で，$\triangle\mathrm{PQR}$ は $\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}:\mathrm{RP}=1:a:\sqrt{1+a^2}$ より，

$$\mathrm{PQ}=\frac{\mathrm{PR}}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{ax-f(x)}{\sqrt{1+a^2}}\ .$$

よって，

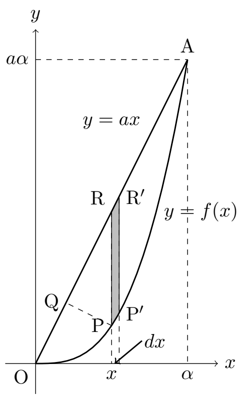
$$dV=\pi\mathrm{RP}\cdot\mathrm{PQ}\,dx=\frac{\pi(ax-f(x))^2}{\sqrt{1+a^2}}\,dx\ .$$

したがって，

$$V=\int_0^\alpha dV=\int_0^\alpha \pi\mathrm{RP}\cdot\mathrm{PQ}\,dx=\int_0^\alpha\frac{\pi(ax-f(x))^2}{\sqrt{1+a^2}}\,dx\ .$$

とんがりコーン積分の手順のまとめ

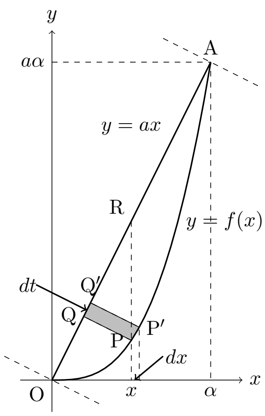
ポイント：厚みが dx の円錐の側面を考える．$dV=\pi\mathrm{RP}\cdot\mathrm{PQ}\,dx$



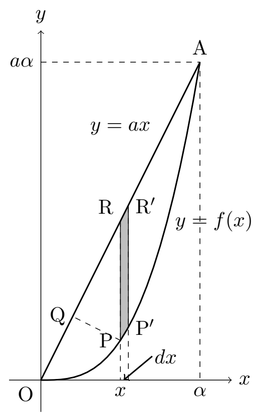
① PQ の長さは，$\triangle$PQR の辺の長さの比から簡単に求まる．

② あとは，$V=\int_0^\alpha dV=\int_0^\alpha \pi\mathrm{RP}\cdot\mathrm{PQ}\,dx$ に代入して計算する．

2.5.3　ハム積分 と とんがりコーン積分 の相違について



ハム積分



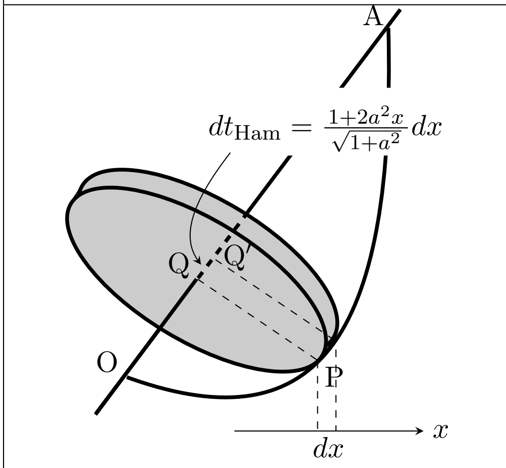
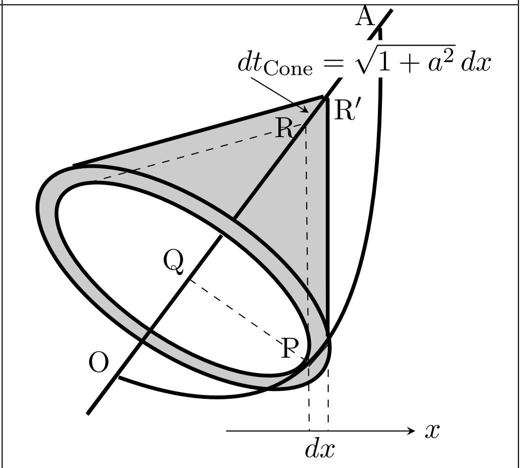
コーン積分

ハム積分は，$\boldsymbol{V=\int_{O}^{A}\pi PQ^2\,dt}$ で，$\boldsymbol{dt=QQ'}$

とんがりコーン積分は，$\mathrm{RR'}=\sqrt{1+a^2}\,dx$ で，$\mathrm{RP}=\sqrt{1+a^2}\,\mathrm{PQ}$ に注意すると，

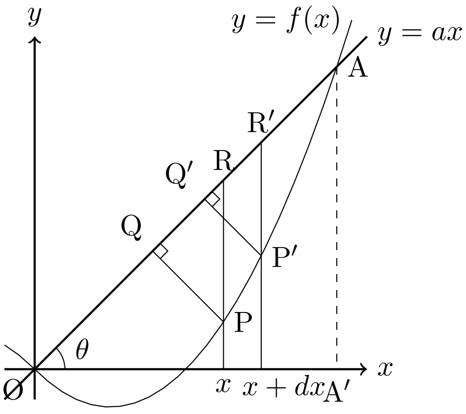
$$V=\int_0^{\alpha}dV=\int_0^{\alpha}\pi\mathrm{RP}\cdot\mathrm{PQ}\,dx=\int_0^{1}\pi\sqrt{1+a^2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PQ}\,dx=\int_0^{1}\pi\mathrm{PQ}^2\cdot\mathrm{RR'}\ .$$

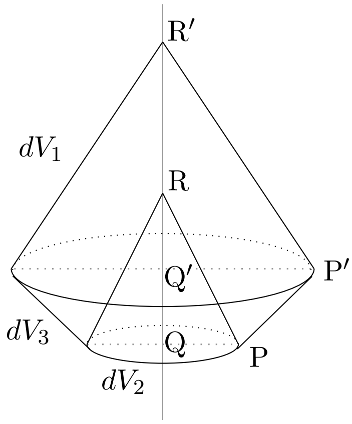
ここで，軸 OA で点 O からの距離を t とすれば，$\mathrm{RR'}=dt$ より $\boldsymbol{V=\int_{O}^{A}\pi PQ^2\,dt}$ で，$\boldsymbol{dt=RR'}$

<table>
<tr><th>ハム積分</th><th>とんがりコーン積分</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$V=\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}}\pi\mathrm{PQ}^2\,dt_{\mathrm{Ham}}\quad(dt_{\mathrm{Ham}}=\mathrm{QQ'})$</td><td>$V=\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}}\pi\mathrm{PQ}^2\,dt_{\mathrm{Cone}}\quad(dt_{\mathrm{Cone}}=\mathrm{RR'})$</td></tr>
</table>

つまり，$\pi\mathrm{PQ}^2$ は同じで，厚み dt を $\boldsymbol{dt_{\mathrm{Ham}}=QQ'}$ とするか，$\boldsymbol{dt_{\mathrm{Cone}}=RR'}$ とするかの違い.

2.5.4　コーン部分の体積が $dV=\pi\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PQ}\,dx$ になることについて





$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \gamma \text{とおく}.\ \sin\theta = a\gamma\ .$$

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{PR} = ax - f(x), & \mathrm{PQ} = \gamma\mathrm{PR}, & \mathrm{QR} = a\gamma\mathrm{PR} \\
\mathrm{P'R'} = a(x+dx) - f(x+dx), & \mathrm{P'Q'} = \gamma\mathrm{P'R'}, & \mathrm{Q'R'} = a\gamma\mathrm{P'R'}
\end{array}$$

$$\mathrm{QQ'} = (\cos\theta,\,\sin\theta)\cdot(dx,\,dy) = (\gamma,\,a\gamma)\cdot(dx,\,f'(x)dx) = \gamma(1+af'(x))dx\ .$$

dx の２次以上の項は積分に影響しないので，$O(dx^2)$ は 0 とみなして計算する.

$$\begin{aligned}
dV_1 = \pi\mathrm{P'Q'}^2 \times \frac{1}{3}\mathrm{Q'R'} &= \frac{\pi}{3}a\gamma^3\mathrm{P'R'}^3 \\
&= \frac{\pi}{3}a\gamma^3\{a(x+dx) - f(x+dx)\}^3 \\
&= \frac{\pi}{3}a\gamma^3(ax + adx - f(x) - f'(x)dx)^3
\end{aligned}$$

$$dV_2 = \pi\mathrm{PQ}^2 \times \frac{1}{3}\mathrm{QR} = \frac{\pi}{3}a\gamma^3\mathrm{PR}^3 = \frac{\pi}{3}a\gamma^3(ax - f(x))^3$$

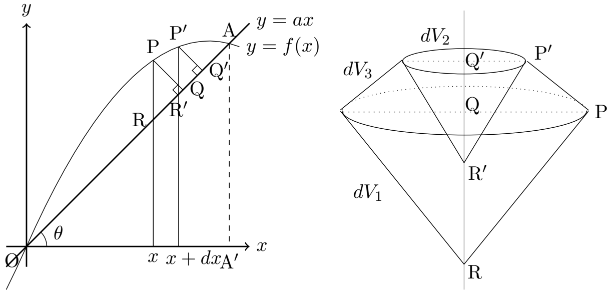
$$\begin{aligned}
dV_3 &= \frac{\pi}{3}\left(\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{PQ}\cdot\mathrm{P'Q'} + \mathrm{P'Q'}^2\right)\cdot\mathrm{QQ'} + O(dx^2) \qquad (\because \text{錐台の体積}) \\
&= \frac{\pi}{3}\gamma^2\{(ax - f(x))^2 + (ax - f(x))(ax + adx - f(x) - f'(x)dx) \\
&\qquad + (ax + adx - f(x) - f'(x)dx)^2\} \times \gamma(1 + af'(x))dx \\
&= \pi\gamma^3(ax - f(x))^2(1 + af'(x))dx
\end{aligned}$$

よって，$dV_1 - dV_2 = \pi a\gamma^3(ax - f(x))^2(a - f'(x))dx$ なので，

$$\begin{aligned}
dV &= dV_1 + dV_3 - dV_2 \\
&= \pi\gamma^3(ax - f(x))^2(a^2 - af'(x) + 1 + af'(x))dx \\
&= \pi\gamma^3(ax - f(x))^2(1 + a^2)dx \\
&= \pi\gamma(ax - f(x))^2dx \qquad (\because 1 + a^2 = \frac{1}{\gamma^2}) \\
&= \pi\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PQ}\,dx \qquad (\because \mathrm{PQ} = \gamma\mathrm{PR})\ .
\end{aligned}$$

つまり，dV は 円錐の側面積 $\times\, dx$ ということ。

（参考）$y = f(x)$ が上に凸の場合



$\mathrm{PR} = f(x) - ax$, $\quad \mathrm{P'R'} = f(x+dx) - a(x+dx)$ になることに注意して，同様に計算する．

$$dV_1 = \pi \mathrm{PQ}^2 \times \frac{1}{3}\mathrm{QR} = \frac{\pi}{3} a\gamma^3 \mathrm{PR}^3 = \frac{\pi}{3} a\gamma^3 (f(x) - ax)^3$$

$$\begin{aligned} dV_2 = \pi \mathrm{P'Q'}^2 \times \frac{1}{3}\mathrm{Q'R'} &= \frac{\pi}{3} a\gamma^3 \mathrm{P'R'}^3 \\ &= \frac{\pi}{3} a\gamma^3 \{f(x+dx) - a(x+dx)\}^3 \\ &= \frac{\pi}{3} a\gamma^3 (f(x) + f'(x)dx - ax - adx)^3 \end{aligned}$$

よって，

$$dV_1 - dV_2 = -\pi a\gamma^3 (f(x) - ax)^2 (f'(x) - a)dx = \pi a\gamma^3 (f(x) - ax)^2 (a - f'(x))dx\ .$$

また，

$$\begin{aligned} dV_3 &= \frac{\pi}{3}\left(\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{PQ}\cdot\mathrm{P'Q'} + \mathrm{P'Q'}^2\right)\cdot \mathrm{QQ'} + O(dx^2) \\ &= \frac{\pi}{3}\gamma^2 \{(f(x) - ax)^2 + (f(x) - ax)(f(x) + f'(x)dx - ax - adx) \\ &\qquad + (f(x) + f'(x)dx - ax - adx)^2\} \times \gamma(1 + af'(x))dx \\ &= \pi\gamma^3 (f(x) - ax)^2 (1 + af'(x))dx\ . \end{aligned}$$

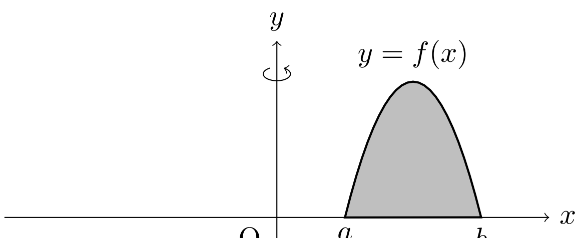
よって，dV は

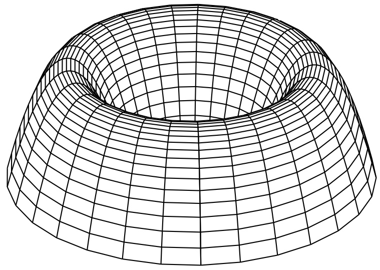
$$\begin{aligned} dV &= dV_1 + dV_3 - dV_2 \\ &= \pi\gamma^3 (f(x) - ax)^2 (a^2 - af'(x) + 1 + af'(x))dx \\ &= \pi\gamma^3 (f(x) - ax)^2 (1 + a^2)dx \\ &= \pi\gamma (f(x) - ax)^2 dx \\ &= \pi \mathrm{PR}\cdot\mathrm{PQ}\, dx \end{aligned}$$

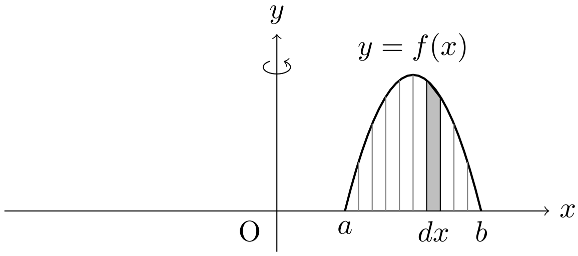
と，dV が 円錐の側面積 $\times\, dx$ となり，同じ結果を得る

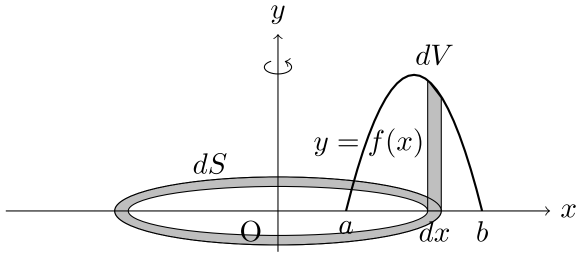
2.6 玉ねぎ積分

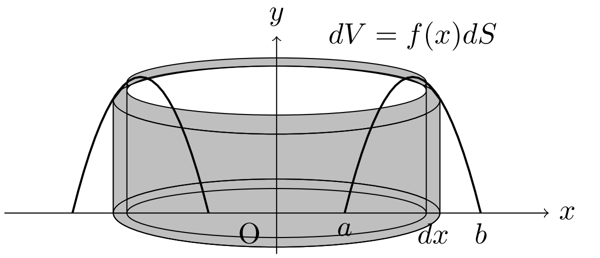
$0 \leqq a < b$ の範囲で，$y = f(x) \geqq 0$ を y 軸で回転させたときの体積











$$V = \int_a^b dV$$

dV は，底面が円環 dS，高さが $f(x)$ の柱状のものなので，

$$dV = f(x)\, dS$$

円環の面積は，

$$dS = \pi(x+dx)^2 - \pi x^2 = 2\pi x dx$$

より，

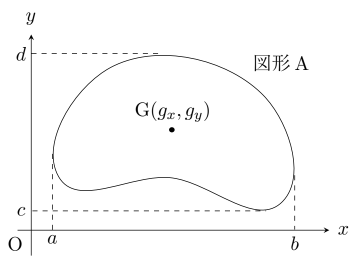
$$dV = f(x)\, dS = 2\pi x f(x) dx$$

したがって，

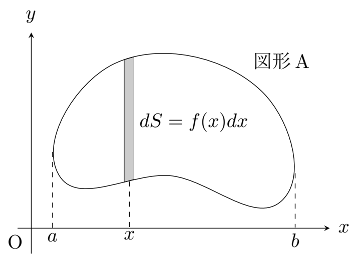
$$V = \int_a^b dV = \int_a^b f(x)\, dS = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

注：$x<0$ のとき，$dS = \pi(-x)^2 - \pi\{-(x+dx)\}^2 = -2\pi x dx$ となるので，$x>0$ と合わせて $dS = 2\pi|x|dx$ とすればよい．

2.7　重心



図形 A の重心を $\mathrm{G}(g_x, g_y)$ とする．
g_x について．
各面積要素 dS に x の値をかけ，その関与度を求める．それを図形 A の面積で割って正規化したものが重心の x 座標．（期待値みたいなもの）



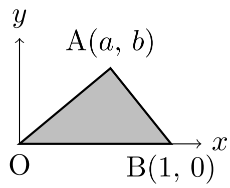
$$g_x = \frac{\displaystyle\int_a^b x\,dS}{\displaystyle\int_a^b dS} = \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}$$

y 座標も同じ.

$$g_y = \frac{\displaystyle\int_c^d y\,dS}{\displaystyle\int_c^d dS}$$

【例題】 三角形の重心

回転と相似変換により，３点 O, A$(a,\,b)$, B$(1,\,0)$ を頂点とする三角形を考えれば十分.



重心はもちろん $\left(\dfrac{a+1}{3},\,\dfrac{b}{3}\right)$.

g_x について．直線 OA : $y=\dfrac{b}{a}x$，直線 AB : $y=\dfrac{b}{a-1}(x-1)$ で，$dS = y\,dx$ より，

$$\int_0^1 x\,dS = \int_0^a x\cdot\frac{b}{a}x\,dx + \int_a^b x\cdot\frac{b}{a-1}(x-1)\,dx = \frac{1}{6}b(a+1)\ .$$

面積 $S=\dfrac{b}{2}$ より，$g_x = \dfrac{\frac{1}{6}b(a+1)}{\frac{b}{2}} = \dfrac{a+1}{3}$.

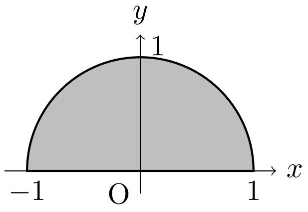
g_y について．相似より $dS = \dfrac{b-y}{b}\,dy$.

$$\int_0^b y\,dS = \int_0^b y\cdot\frac{b-y}{b}\,dy = \frac{b^2}{6}\ .$$

したがって，$g_y = \dfrac{\frac{b^2}{6}}{\frac{b}{2}} = \dfrac{b}{3}$.

【例題】 半円の重心

単位円の半円を考えれば十分.

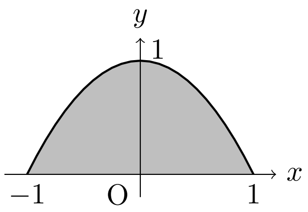


対称性より $g_x = 0$.
g_y について. $dS = 2\sqrt{1-y^2}\,dy$ より,

$$\int_0^1 y\,dS = \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{2}{3}\ .$$

$S = \dfrac{\pi}{2}$ より, $g_y = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{4}{3\pi}$.

【例題】 放物線 $y = 1 - x^2,\ y \geqq 0$ の重心



まず面積. $S = \displaystyle\int_{-1}^1 y\,dx = 2\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{4}{3}$.
対称性より $g_x = 0$.
g_y について. $dS = 2x\,dy\ (x \geqq 0)$ で $y = 1 - x^2$ より,

$$\int_0^1 y\,dS = \int_0^1 2xy\,dy = \int_1^0 2x(1-x^2)(-2x)\,dx = \frac{8}{15}\ .$$

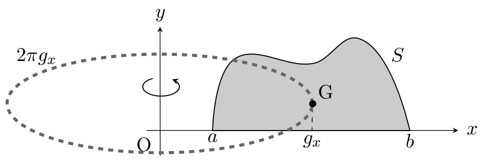
したがって, $g_y = \dfrac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{2}{5}$.

2.8 パップス・ギュルダン (Pappus - Guldin) の定理

玉ねぎ積分の式を変形すると,

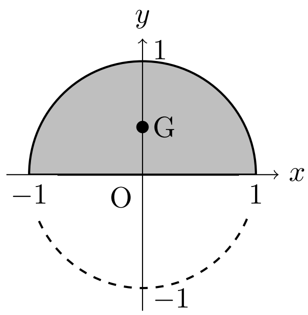
$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx \\ &= 2\pi \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b dS} \times \int_a^b dS \\ &= 2\pi g_x \cdot S \end{aligned}$$

となる. これがパップス・ギュルダン (Pappus - Guldin) の定理.



【例題】 単位球

体積はもちろん $\dfrac{4}{3}\pi$.

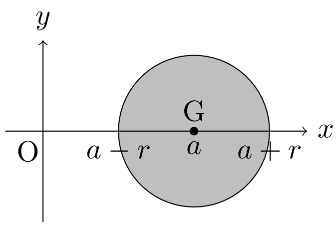


単位円の半円の重心は $\left(0,\ \dfrac{4}{3\pi}\right)$ で, 面積は $\dfrac{\pi}{2}$ より,

$$V = 2\pi \times \frac{4}{3\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}\pi\ .$$

【例題】 トーラス (torus)

$a > r > 0$ のとき, 円 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体



円の重心は $(0, a)$ で，面積は πr^2 より，

$$V = 2\pi \times a \times \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2 \ .$$

普通に体積を求めると，$x = a \pm \sqrt{r^2 - y^2}$ より，

$$V = 2\int_0^r \pi \left(x_{外}^2 - x_{内}^2 \right) dy = 2\int_0^r 4\pi a\sqrt{r^2 - y^2}\, dy = 8\pi a \times \frac{\pi r^2}{4} = 2\pi^2 a r^2 \ .$$

2.9　曲線の長さ

曲線の長さは，動点が（戻らずに）動いた距離である.

① パラメータ表示された曲線

パタメータ t を時刻とみれば,
位置 $\vec{p}(t) = (x(t), y(t))$ のとき，速度は $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt} \right)$ なので,
速さは $|\vec{v}| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$.

（道のり）＝（速さ）×（時間）より,

$$dL = |\vec{v}|\, dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \ .$$

したがって,

$$L = \int_{t_1}^{t_2} dL = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

ということ.
※なお，一般の曲線の場合，パラメータは時刻である必然性はないので，変数は何でもよい

② 関数で表された曲線

曲線の長さの公式

$$L=\int_{t_1}^{t_2} dL=\int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}|\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

で，x をパラメータにとる．

つまり，$\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \end{cases}$ として，x の変域を $a \leqq x \leqq b$ とする．

すると，

$$L=\int_a^b dL=\int_a^b |\vec{v}|\,dx=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx$$

となる（だけ）．
※敢えて覚えるほどのものではない．