２０２３年度　数学科リレー講座

パスカル生誕４００年記念

パスカル特集

海城中学高等学校

数学科

教室掲示をお願いします

夏期講習

２０２３年度　数学科リレー講座

パスカル生誕４００年記念　パスカル特集

Blaise Pascal (1623～1662)

日程 第７・８ターム（8/17～19, 8/21～23）の３限（11:10～12:30）

講師 数学科教員多数

概要 今年はパスカル生誕４００年の記念すべき年です。

パスカルといえば、数学ではパスカルの三角形やパスカルの定理などありますし、物理ではパスカルの原理が有名ですね。また哲学では「人は考える葦である」という言葉が有名ですがこれもパスカルです。

リレー講座では、この偉大なパスカルの数学の業績に注目した特集を組みます。

前半の３日は**「パスカルアラカルト」**。パスカルに関する色々な数学のお話をします。

後半の３日はパスカルの定理を軸にした**「射影幾何入門」**。

中学生にはちょっと難しいかもしれませんが、高度な数学を扱う際には一から説明するので、数学に意欲のある皆さんであればついていける内容となっています。こういう幾何学もあるんだというのを感じ取ってもらうだけでも十分意義のあることですよ。

注意 高２・３生はweb登録が締め切られているため、受講を希望する際は数学科教諭に直接申し込んでください。また、各学年内で人数過多となった場合は学年内で抽選を行います。

はじめに

～パスカル生誕 400 年記念・夏期数学科リレー講座講義録に寄せて～

過日、幾何の授業でタレスの定理を扱った。タレスは他にも様々な定理を発見した“数学者”か？と問われたので、伝記にあたってみた。曰く、哲学の始祖にして古代ギリシア七賢人の一人。ピラミッドの高さを計った最初の人にして、今日でいうオプション取引の始祖でもある由。

なるほどご多分に漏れず、この時代の数学者は哲人をかねているのであった。

とここで考えたのは、

“数学者がほぼ数学のみを研究するようになったのはいつ頃からか？”

ということである。

ノーベル物理学賞を授与されたファインマンが絶賛した“三次方程式の根の発見”で名高いデルフェッロが哲人であった記述を見ることはない。尤も、“三次方程式物語の大立者”であるカルダノは数学者の顔はもとより多くの顔をもつ博覧強記の人であった。

となると、15 世紀あたりからかと思いきや、座標幾何の始祖デカルトは、数学者というより、「我思う故に我あり」の言葉が人口に膾炙されていることを想起するまでもなく、哲人としての方が世上での通りがよかろう。

となれば、ニュートン卿以降となろうか。すなわち 17 世紀後中期以降といえ、なるほど 18 世紀のオイラー、19 世紀のガウス、ヤコービ、アーベル、ガロワに哲人的要素を見ることはない。

さて、本年（2023 年）に生誕四百年を迎えたパスカルである。言うまでもなく 17 世紀の人である。

確率論ならびに射影幾何の始祖にして、「人間は考える葦である」とその著書『パンセ』で喝破した数学者であり、哲人である。私見では、パスカルもデカルト同様、世上では哲人として認識されているように思われる。

ここで、ニュートン卿の生誕が 1642 年であることを知るとき、果たしてパスカルこそは哲人と数学者という二面性あるいは多面性をもった最後の人と言うことが言えまいか。

もしこの一予想が概ね当を得ているようであれば、17 世紀半ばから後半に哲学と数学の分科を生じせしめるなにかがあったのであろうか。これについては諸賢からのご指摘を切望するものである。

ところで、数学史における有名な物語は多分に後世の人々の脚色が入り、前出のカルダノの如きは、通史によれば謀略家であって、タルタリア(これは吃音を意味するニックネームであり、本名はニコロ・フォンタナの由)を騙して憤死させた大悪人となっているが、近年の史家の詳細な調査によれば、両者は和解しており、カルダノの著書『アルスマグナ』を繙読すれば、フォンタナの業績をきちんと記述している。

他にもコーシーに、アーベルの若き才能を潰した悪人とされるエピソードがあるが、コー

シーはアーベルに期待を大いに寄せていた記述があるようで、これも疑わしく思われてくる。なればボヤイをノイローゼに陥れたガウスの冷徹さというのも実のところどうだったのであろうか。

ともあれ、正確無比を以てその身上とする数学者の、しかし伝記となると脚色が入るのが面白い。

その中にあって、確率論の夜明けとされるパスカルとシュバリエ・ド・メレの賭博に関するエピソードこそは、紛うことなき事実のようである。

このエピソードに曰く、いわば“世の中にふたつと同じものはなし”は、恰も“あるはある、あらぬはあらぬ”といった存在論を思わしめ、なるほど哲人としてのパスカルの面目躍如たるものがあろう。

それにつけても、数学、哲学のみならず、その名を冠した単位のある物理への貢献は言うまでもなく、化学現象とパスカルの三角形の親和性をはじめ、パスカルの業績は今日なおもってその光彩は鮮やかである。

さて、こう記してきて、夜の外気に触れたくなり、拙宅の玄関を出た。

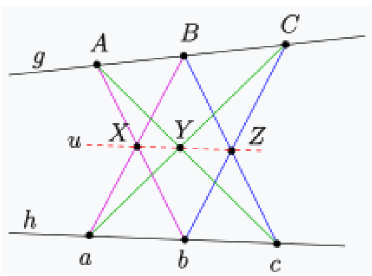
晩秋の澄んだ空気に浮かびあがるオリオンを見上げたその刹那、その形状にパスカルの定理（の特別な場合であるパップスの定理）を思ったあたり、偉大な学者の生誕四百年記念リレー講座講義録の巻頭言をものす後押しを天上からされた思いがするのである、とするのはいささか出来すぎのきらいがあろうか。

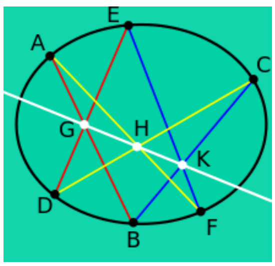
しかし、もの皆憩える静寂のなかにそれを思ったことも、パスカルとシュバリエ・ド・メレの故事同様、紛うことなき事実なのである。

ともあれ、今夏もリレー講座を開講できた喜びと感謝を、本講座に関わられた全ての皆様に捧げ、深謝する次第です。ありがとうございました。

2023 年 11 月末日

数学科主任　川崎真澄



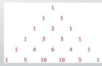


（画像はフリー素材および wikipedia からの転載です）

第14回 夏期数学科リレー講座 初日 (2023・8・17)

ご存じ

パスカルの三角形の 秘宝を探し出せ♬



川崎真澄(海城中高), 城島智子(武蔵高中・慶應普通部)

今回の夏の数学科リレー講座は，
数学者であり物理学者，そして哲学者etcと
いった多彩な顔をもった偉人

“パスカル”

の生誕400年を記念して，パスカルの数学上の業績について特集します。

Blaise Pascal
(仏) 1623－1662

前半の3日間は主に次のテーマで進行する予定です：

(初日) パスカルの三角形
☞ ご存じ“パスカルの三角形”にまつわるいろいろなお話です。
皆さんに新たな発見もしてもらいます♪

(2日目) 確率論
☞ シュバリエ・ド・メレという貴族が，賭博において有利な賭け方をパスカルに相談したことが確率論の始まりとされています。

(3日目) 射影幾何学入門
☞ ユークリッド幾何学を内包し，しかもより深い性質を統一的に扱える“射影幾何学”もパスカルが始祖とされます。果たしてどのような幾何学なのでしょうか？

後半の3日間は射影幾何学を深堀りします。

哲学者としてのパスカル

パスカルの、生前ノートに残してあった文をまとめたものに

『パンセ』(思想)

があります。

”人間は考える葦である“

というあまりにも有名な彼の言葉がありますが，これもパンセに書かれています。
この言葉は，人間とは理性や知性では分かりえないものがあるものだ，という意と捉えられましょうが，これに象徴されるように，パンセでは理性よりも情緒を重んじることが説かれています。

例えば，彼は神の存在は論理や知性では証明できないとしています。それでもなお、多くの人々は神の存在を否定できない心情をもつというのです。
であれば、たとえ神が存在しないとしても、存在することを前提としてそれを畏怖して善く生きよ、と説きます。
なぜなら、神の存在が否定されたとしても、善く生きるほうが結果的に自らの利益になるから、というのです。

～パスカルの賭け～

皆さんはどのような感想を持たれるでしょうか。
興味を持った君は，是非この書を手に取られることをお勧めします。
邦訳としては
＜前田陽一，由木康 (訳)
『世界の名著24 パスカル』「パンセ」中央公論社＞
などがあります。
なお、リレー講座中、より深い解説がされる場面があるかもしれません。どうぞお楽しみに♬

では今日の内容です♪

今日は，皆さんご存じのパスカルの三角形について考察を深めましょう。

§1. 式の展開

§2. パスカルの三角形と展開式

§3. 種々の発見へ

の順で進めていきます。

§1. 式の展開

本校では中学2年生の4月に“式の展開”を習います.

(例1) $(a+2b-3c)(2a-b+c)$ を展開せよ.

×	$2a$	$-b$	c
a	$2a^2$	$-ab$	ac
$2b$	$4ab$	$-2b^2$	$2bc$
$-3c$	$-6ac$	$3bc$	$-3c^2$

(答)
$2a^2-2b^2-3c^2$
$+3ab-5ac+5bc$

（例2）$(2x+3y)^3$ を展開せよ.

➡ Step1　$(2x+3y)^2$ を計算する

×	$2x$	$3y$
$2x$	$4x^2$	$6xy$
$3y$	$6xy$	$9y^2$

（答）
$4x^2+12xy+9y^2$

➡ Step2　$(4x^2+12xy+9y^2)(2x+3y)$ を計算する

×	$4x^2$	$12xy$	$9y^2$
$2x$	$8x^3$	$24x^2y$	$18xy^2$
$3y$	$12x^2y$	$36xy^2$	$27y^3$

（答）
$8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

（Q1）展開せよ.

$$(A+B)^2 = 1A^2 + 2AB + 1B^2$$

$$(A+B)^3 = 1A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + 1B^3$$

$$(A+B)^4 = 1A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + 1B^4$$

$(2x-3y)^4$　の展開なら, $(A+B)^4$ を展開した式で
$A=2x$, $B=-3y$ とすることにより

$$(2x)^4+4(2x)^3(-3y)+6(2x)^2(-3y)^2+4(2x)(-3y)^3+(-3y)^4$$

$$=16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$$

となる.

（Q2）$(2x-y)^3$を展開せよ.

§2. パスカルの三角形と展開式

ここで, もう一度　次をながめてみよう：

$(A+B)^0 = 1$

$(A+B)^1 = 1A + 1B$

$(A+B)^2 = 1A^2 + 2AB + 1B^2$

$(A+B)^3 = 1A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + 1B^3$

$(A+B)^4 = 1A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + 1B^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

➡ $(A+B)^5$ の展開式を予想してみよう♪

そう,

$(A+B)^5 = 1A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 10AB^4 + 1B^5$

となります.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

～パスカルの三角形(の一部)～

パスカルの三角形における　横の列の数　とは

$(A+B)^n$ の展開式での係数を表している

ことが分かります.

（Q）$(A+B)^6$　の展開式を書いてみよう.

（答）$A^6+6A^5B+15A^4B^2+20A^3B^3+15A^2B^4+6AB^5+B^6$

(例)
$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$ の展開における x^3 の係数と定数項を求めよ.

➡ $(A+B)^6$　の展開式で$A=x^2$, $B=-\frac{2}{x}$ としてみる.

$$(x^2)^6+6(x^2)^5\left(-\frac{2}{x}\right)+15(x^2)^4\left(-\frac{2}{x}\right)^2+\underline{20(x^2)^3\left(-\frac{2}{x}\right)^3}$$
$$\underline{+15(x^2)^2\left(-\frac{2}{x}\right)^4}+6(x^2)\left(-\frac{2}{x}\right)^5+\left(-\frac{2}{x}\right)^6$$

は, $20x^6\left(-\frac{8}{x^3}\right)=-160x^3$

は, $15\cdot x^4\cdot\left(\frac{16}{x^4}\right)=240$

(答)は, 順に
-160 , 240

(Q)
$\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^4$ の展開における x^4 の係数と定数項を求めよ.

➡$\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^4$

$$=(2x^3)^4+4(2x^3)^3\left(-\frac{1}{x}\right)+6(2x^3)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^2+4(2x^3)\left(-\frac{1}{x}\right)^3+\left(-\frac{1}{x}\right)^4$$

$$=16x^{12}-32x^8+24x^4-8+\frac{1}{x^4}$$

より, (答)は, 順に　24 , -8

§3. 種々の発見へ

さて，ここで今日のメインテーマに入りましょう．
パスカルの三角形には実に興味深い性質が多々あるのですが，
とりわけ，

パスカルの三角形には，そこかしこに有名数列が潜んでいる

のです！！
まずは，どんな有名数列が潜んでいるかを御覧に入れますので，
それを観察した後は

“探求タイム”

として，皆さんに有名数列を発見していただこうと思います．

まずは，パスカルの三角形の横の列からみていきましょう：

$$1 = 2^0$$
$$1 + 1 = 2^1$$
$$1 + 2 + 1 = 2^2$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$$
$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4$$
$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

といった性質や，

$$1 = 11^0$$
$$1 \quad 1 = 11^1$$
$$1 \quad 2 \quad 1 = 11^2$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 = 11^3$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 = 11^4$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 = 11^5$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

といった性質もあります．

（⇒証明にチャレンジしてみましょう♪）

パスカルの三角形の横の列の数の意味が
分かったところで，
“斜めの列や縦の列”
を見ていきましょう♪

次に斜めの列や縦の列を見てみましょう． まずは斜めから．
斜め その1

1
1 ① 1 0
1 ② 2 1
1 ③ 3 3 1
1 ④ 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

① $1^2 = 0 + 1$ ② $2^2 = 1 + 3$ ③ $3^2 = 3 + 6$ ④ $4^2 = 6 + 10$

斜め その2

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

1
1
2
3
5
8
13
↑これは・・・
フィボナッチ数！！

斜め その3

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

自然数
三角数
三角錐数

縦

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

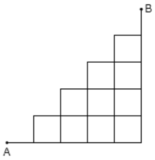
$1 \div 1 = 1$ $2 \div 2 = 1$ $6 \div 3 = 2$ $20 \div 4 = 5$ $70 \div 5 = 14$

➡ 1 , 1 , 2 , 5 , 14 , ⋯ これは？？

カタラン数が現れた！！

カタラン数（カタラン・ミャンガット数）とは？

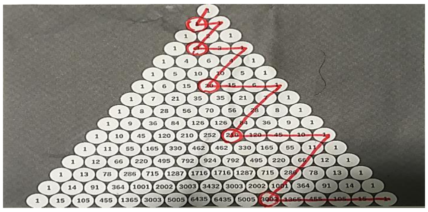
（Q）
右の図で，AからBへの
最短経路は
何通りあるか？



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

又，カタラン数が現れた！！

私もやってみました！これはZ世代向けでしょうか…



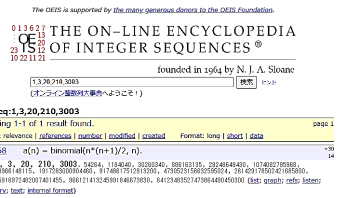
1, 3, 20, 210, 3003, …

この発見した数列が**“意味ある数列”**かどうか
を調べる際に便利なのが，オンライン上の

オンライン整数列大辞典

です．これに，1，3，20，210，3003を
入力すると…

こんな画面が出てきました（一部抜粋）：



意味ある数列ではあったようです！！

では，残りの時間は

“探求タイム”

です♪配布したパスカルの三角形を
用いて何千年もの間，潜んでいる有
名数列を探す作業をやってみましょ
う！！

探せた！という人は，コンクールに出品しよう♪

初日はここまでです。

明日もお楽しみに♪

2023 年度　数学科リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半）

下田 裕貴

2023 年 8 月 18 日

1 日目の復習

パスカルの三角形

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Q. 皆さんはいくつの性質を見つけられましたか？

パスカルの三角形の性質 1

例えば,

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \times 2 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
 & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

パスカルの三角形の性質 2

例えば,

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & = 4 + 3 = 7 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & = 7 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
 & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

パスカルの三角形の性質

1. 各底辺の和は直前の底辺の和の 2 倍になる
2. (ある底辺の一端から始めた x 個の和)$=$(直前の底辺の一端から始めた x 個の和)$+$(直前の底辺の一端から始めた $x-1$ 個の和)

などなど…

パスカル (1623-1662) は数三角形について

19 の性質

を見つけ，それを用いて数学の各分野を発展させました。

今回はその中でも，特に確率について，パスカルと，その文通相手のフェルマーが成した偉業を解説していこうと思います。

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半）
下田 裕貴
1 日目の復習
確率
確率とは
賭場の確率
未完のゲームの問題
パスカルの解答
フェルマーの解答
前半のまとめ

確率とは

確率とは

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半）
下田 裕貴
1 日目の復習
確率
確率とは
賭場の確率
未完のゲームの問題
パスカルの解答
フェルマーの解答
前半のまとめ

Q. 区別のつかない 2 枚の硬貨を投げるとき，1 枚が表で，もう 1 枚が裏である確率を求めよ。
ただし，表と裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする。
Point　確率は，起こりうるすべての場合の数を考える！

A	B	
表	表	×
	裏	◯
裏	表	◯
	裏	×

よって，求める確率は

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

確率とは

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半）
下田 裕貴
1 日目の復習
確率
確率とは
賭場の確率
未完のゲームの問題
パスカルの解答
フェルマーの解答
前半のまとめ

Q. 4 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ から無作為に 1 枚選ぶとき，$\boxed{1}$ を選ぶ確率を求めたい。次の考え方は合っているだろうか？

A. 起こりうるすべての場合の数は 3 通り（$\boxed{1}$ を選ぶか，$\boxed{2}$ を選ぶか，$\boxed{3}$ を選ぶか）で，そのうち $\boxed{1}$ を選ぶ場合の数は 1 通りなので，求める確率は $\frac{1}{3}$

確率とは

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半）
下田 裕貴
1 日目の復習
確率
確率とは
賭場の確率
未完のゲームの問題
パスカルの解答
フェルマーの解答
前半のまとめ

合っていない！

- $\boxed{1}$ を選ぶ確率は，$\frac{2}{4}$
- $\boxed{2}$ を選ぶ確率は，$\frac{1}{4}$
- $\boxed{3}$ を選ぶ確率は，$\frac{1}{4}$

よって，各事象が起こる確率がすべて同じではない！

確率とは

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半）
下田 裕貴
1 日目の復習
確率
確率とは
賭場の確率
未完のゲームの問題
パスカルの解答
フェルマーの解答
前半のまとめ

正答．4 枚のカードを，$\boxed{1A}$，$\boxed{1B}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ と区別すると，

- $\boxed{1A}$ を選ぶ確率は，$\frac{1}{4}$
- $\boxed{1B}$ を選ぶ確率は，$\frac{1}{4}$
- $\boxed{2}$ を選ぶ確率は，$\frac{1}{4}$
- $\boxed{3}$ を選ぶ確率は，$\frac{1}{4}$

そのうち $\boxed{1}$ を選ぶ場合の数は 2 通りなので，
求める確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

確率とは

各事象が同様に確からしく起こるとき，
事象 A が起こる確率 $P(A)$ は，

$$P(A) = \frac{\text{（事象 A の起こる場合の数）}}{\text{（起こりうるすべての場合の数）}}$$

賭場の確率

賭場の確率

Q. 3 個のサイコロを投げて，その 3 つの目の和を当てる賭けがある。
和が 9 になる場合と，10 になる場合ではどちらに賭けるべきか？

賭場の確率

和が 9 になる場合と，和が 10 になる場合では，
どちらも 6 通りの目の出方がある。

和が 9	和が 10
6-2-1	6-3-1
5-3-1	6-2-2
5-2-2	5-4-1
4-4-1	5-3-2
4-3-2	4-4-2
3-3-3	4-3-3

しかし，賭場では和が 10 の方が出やすいことが知られていた。なぜそうなるかは後半で…

まだ「確率」という概念がなかった頃，賭場では確率の前身となる「組み合わせ」の考えが発展していきました。先のような問題では，サイコロを振ることは決まっていたため，組み合わせを正確に数えれば，事象の起こりやすさを計算できたのです。

しかしながら，次のような問題は簡単に答えを出すことはできませんでした。

未完のゲームの問題

未完のゲームの問題

- コインを投げて，表ならプレイヤー A が 1 点，裏ならプレイヤー B が 1 点を取り，最終的に x 点取った方が賭金を総取りするゲームを考える。
勝つまでに，プレイヤー A があと a 点，プレイヤー B があと b 点必要な時点で**ゲームを中断**した場合に，プレイヤー A に分配される賭金の割合 $e(a, b)$ は何か？

  この問題は，1654 年，パスカルとフェルマーが解くまで未解決の問題であった。

未完のゲームの問題（単純なケース）

問題を単純化して考えてみましょう。

Q. コインを投げて，表ならプレイヤー A が 1 点，裏ならプレイヤー B が 1 点を取る。先に 3 点とった方が勝ちとする。
勝つまでに，プレイヤー A があと 1 点，プレイヤー B があと 2 点必要な時点で**ゲームを中断**した場合に，プレイヤー A に分配される賭金の割合は何か？

（この割合が $e(1, 2)$ である。）

未完のゲームの問題に対しての議論

- パチョーリ (1445-1517)
ゲームの中止時点での得点に応じて，つまり上の例だと A が $e(1, 2) = \frac{2}{3}$ の割合で賞金を分配することを答えとして提案した。

  これは，未来のことは神が決めるものであり，公正だという考えのもと提案された。

未完のゲームの問題に対しての議論

- カルダーノ (1501-1576)
各プレイヤーがすでに何点獲得したかではなくて，ゲームに勝つためにあと何点が必要かによる，ということを正しく指摘した。

  この時代では，そもそも未来の不確定な事実に，数を導入できるのかという疑問があった。

パスカル – フェルマー往復書簡

こうした世の中の中で，1654 年，**一通の手紙**が人類の未来を大きく変えることになる。

メレ (1607-1684) という有名な賭博者が，パスカルに未完のゲームの問題を問いかけた。
パスカルは正しそうな解を見つけたが，自分の論法が正しいかどうか自信が持てなかった。

そこでパスカルは，自身のアイデアを同国で有名な数学者であったフェルマーに送り，手紙のやりとりをしたのである。

パスカルの解答

パスカルの解答 (再帰的手法)

$e(1, 2)$ とは, A があと 1 点, B があと 2 点で勝つときに中断した際の, A の取り分の割合と定める。

- 次の 1 回でコインの表が出たとき
  A があと 0 点, B があと 2 点で勝つので,
  $e(0, 2)$ を計算すれば良い。
- 次の 1 回でコインの裏が出たとき
  A があと 1 点, B があと 1 点で勝つので,
  $e(1, 1)$ を計算すれば良い。

2023 年度　数学科リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半） 下田 裕貴 1 日目の復習 確率 確率とは 賭場の確率 未完のゲームの問題 パスカルの解答 フェルマーの解答 前半のまとめ

パスカルの解答 (再帰的手法)

これらはそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で起こるから,

$$e(1,2) = \frac{1}{2} \times e(0,2) + \frac{1}{2} \times e(1,1)$$

- $e(0,2)$ はすでに A が勝っているので, A の取り分の割合は 1
- $e(1,1)$ は A と B の立場が対等なので, A の取り分の割合は $\frac{1}{2}$

$$\therefore e(1,2) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

2023 年度　数学科リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半） 下田 裕貴 1 日目の復習 確率 確率とは 賭場の確率 未完のゲームの問題 パスカルの解答 フェルマーの解答 前半のまとめ

パスカルの解答と数三角形

パスカルの手法をもとに, 次の値を計算してみよ。

- $e(1,3)$
- $e(2,3)$

2023 年度　数学科リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半） 下田 裕貴 1 日目の復習 確率 確率とは 賭場の確率 未完のゲームの問題 パスカルの解答 フェルマーの解答 前半のまとめ

パスカルの解答と数三角形

- $e(1,3) = \frac{1}{2} \times e(0,3) + \frac{1}{2} \times e(1,2)$
  $= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$
  $= \frac{7}{8}$
- $e(2,3) = \frac{1}{2} \times e(1,3) + \frac{1}{2} \times e(2,2)$
  $= \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
  $= \frac{11}{16}$

数三角形と見比べて, 何か気づくことはないか？

2023 年度　数学科リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半） 下田 裕貴 1 日目の復習 確率 確率とは 賭場の確率 未完のゲームの問題 パスカルの解答 フェルマーの解答 前半のまとめ

パスカルの解答と数三角形

$e(1,2) = \frac{3}{4} = \frac{1+2}{1+2+1}$

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
⋮

2023 年度　数学科リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半） 下田 裕貴 1 日目の復習 確率 確率とは 賭場の確率 未完のゲームの問題 パスカルの解答 フェルマーの解答 前半のまとめ

パスカルの解答と数三角形

$e(1,3) = \frac{7}{8} = \frac{1+3+3}{1+3+3+1}$

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
⋮

2023 年度　数学科
リレー講座
パスカル生誕 400
周年記念
2 日目
確率論（前半）

下田 裕貴

1 日目の復習
確率
確率とは
賭場の確率
未完のゲームの問題
パスカルの解答
フェルマーの解答
前半のまとめ

パスカルの解答と数三角形

$e(2,3) = \frac{11}{16} = \frac{1+4+6}{1+4+6+4+1}$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半） 下田 裕貴 1 日目の復習 確率 確率とは 賭場の確率 未完のゲームの問題 パスカルの解答 フェルマーの解答 前半のまとめ

証明のアイデア

このように，パスカルは未完のゲームの問題が数三角形を利用して解けることを理解していた。

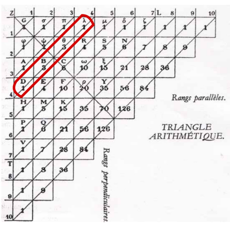
この証明は，

- 「数学的帰納法」によって，
- 「各底辺の和は直前の底辺の和の 2 倍になる」こととと
- 「(ある底辺の一端から始めた x 個の和)$=$ (直前の底辺の一端から始めた x 個の和)$+$(直前の底辺の一端から始めた $x-1$ 個の和)」ことを用いて行われる。

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半） 下田 裕貴 1 日目の復習 確率 確率とは 賭場の確率 未完のゲームの問題 パスカルの解答 フェルマーの解答 前半のまとめ

証明のアイデア

仮に，任意の底辺，例えば第 4 底辺が合わせて 4 勝不足している 2 人の賭博者の分け前を含むとする。



つまり，$e(1,3) = \frac{B+\theta+\lambda}{D+B+\theta+\lambda}$, $e(2,2) = \frac{\theta+\lambda}{D+B+\theta+\lambda}$, $e(3,1) = \frac{\lambda}{D+B+\theta+\lambda}$ とする。

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半） 下田 裕貴 1 日目の復習 確率 確率とは 賭場の確率 未完のゲームの問題 パスカルの解答 フェルマーの解答 前半のまとめ

証明のアイデア

このとき，第 5 底辺もまた，合わせて 5 勝不足している 2 人の賭博者の分け前を含む。なぜならば，

$$
\begin{aligned}
e(2,3) &= \tfrac{1}{2} \times e(1,3) + \tfrac{1}{2} \times e(2,2) \\
&= \tfrac{1}{2} \times \frac{B+\theta+\lambda}{D+B+\theta+\lambda} + \tfrac{1}{2}\frac{\theta+\lambda}{D+B+\theta+\lambda} \\
&= \frac{B+\theta+\lambda+\theta+\lambda}{2D+2B+2\theta+2\lambda} \\
&= \frac{C+R+\mu}{H+E+C+R+\mu}
\end{aligned}
$$

$=$は，パスカルの見つけた二つの性質を用いています！

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半） 下田 裕貴 1 日目の復習 確率 確率とは 賭場の確率 未完のゲームの問題 パスカルの解答 フェルマーの解答 前半のまとめ

フェルマーの解答

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 周年記念 2 日目 確率論（前半） 下田 裕貴 1 日目の復習 確率 確率とは 賭場の確率 未完のゲームの問題 パスカルの解答 フェルマーの解答 前半のまとめ

フェルマーの解答 (組み合わせの方法)

中断後，2 回試合を続けることを想定して，勝った回数で賭金を分配する。

1 回目	2 回目	
A	A	A
A	B	A
B	A	A
B	B	B

つまり，A が $e(1,2) = \frac{3}{4}$ の割合で賞金を分配することを答えとして提案した。

フェルマーの解答 (組み合わせの方法)

Q. フェルマーの手法をもとに, $e(1,3)$ を計算してみよ。

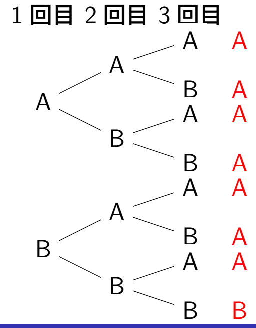
フェルマーの解答 (組み合わせの方法)

2023 年度　数学科
リレー講座
パスカル生誕 400
周年記念
2 日目
確率論（前半）

下田 裕貴

1 日目の復習
確率
確率とは
賭場の確率
未完のゲームの
問題
パスカルの解答
フェルマーの解答
前半のまとめ

中断後, 3 回試合を続けることを想定する。



よって,

$$e(1,3) = \frac{7}{8}$$

2023 年度　数学科
リレー講座
パスカル生誕 400
周年記念
2 日目
確率論（前半）

下田 裕貴

1 日目の復習
確率
確率とは
賭場の確率
未完のゲームの
問題
パスカルの解答
フェルマーの解答
前半のまとめ

前半のまとめ

前半のまとめ

2023 年度　数学科
リレー講座
パスカル生誕 400
周年記念
2 日目
確率論（前半）

下田 裕貴

1 日目の復習
確率
確率とは
賭場の確率
未完のゲームの
問題
パスカルの解答
フェルマーの解答
前半のまとめ

- 各事象が同様に確からしく起こるとき，
事象 A が起こる確率 $P(A)$ は，

$$P(A) = \frac{\text{（事象 A の起こる場合の数）}}{\text{（起こりうるすべての場合の数）}}$$

- パスカルとフェルマーは, 不確定な未来に数を導入することなど不可能だと言われながら, それぞれの方法, 考え方でやってのけた。

参考文献

2023 年度　数学科
リレー講座
パスカル生誕 400
周年記念
2 日目
確率論（前半）

下田 裕貴

1 日目の復習
確率
確率とは
賭場の確率
未完のゲームの
問題
パスカルの解答
フェルマーの解答
前半のまとめ

・Keith Devlin(2010). （原啓介訳）. 世界を変えた手紙 ― パスカル、フェルマーと ＜確率＞ の誕生 ―. 東京：岩波書店.
・岡野豊明 (2019). 世界を変えた手紙. わかみず会.
・平島絡美 (2005). パスカルの数三角形を用いた授業研究 ― 他者の立場の想定による数学と人間との関わり ―. 筑波大学数学教育学研究室, 220-233.

2023 年度　数学科リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半）

上野 大樹

2023 年 8 月 18 日

2023 年度　数学科リレー講座
パスカル生誕 400 年記念
2 日目
確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題

2023 年度　数学科リレー講座
パスカル生誕 400 年記念
2 日目
確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

単純化したカルダーノ・ガリレオのサイコロ問題

前半に紹介したカルダーノ（1556）・ガリレオ（1613〜1623）のサイコロ問題を単純化してみよう．

2 つのサイコロを投げ，その和 S を予想する賭けを行うとき，いくつに賭けるべきだろうか？ただし，サイコロは 1 から 6 の目が等確率で出るものとする．

2023 年度　数学科リレー講座
パスカル生誕 400 年記念
2 日目
確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

単純化したカルダーノ・ガリレオのサイコロ問題（解答）

S は 2 から 12 までのどれかなので，1 つずつ場合を書き出してみよう．

$\boldsymbol{S=2} \to 1+1$　$\boldsymbol{S=3} \to 1+2$　$\boldsymbol{S=4} \to 1+3,\ 2+2$

$\boldsymbol{S=5} \to 1+4,\ 2+3$　$\boldsymbol{S=6} \to 1+5,\ 2+3,\ 3+3$

$\boldsymbol{S=7} \to 1+6,\ 2+5,\ 3+4$

$\boldsymbol{S=8} \to 2+6,\ 3+5,\ 4+4$　$\boldsymbol{S=9} \to 3+6,\ 4+5$

$\boldsymbol{S=10} \to 4+6,\ 5+5$　$\boldsymbol{S=11} \to 5+6$

$\boldsymbol{S=12} \to 6+6$

2023 年度　数学科リレー講座
パスカル生誕 400 年記念
2 日目
確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

単純化したカルダーノ・ガリレオのサイコロ問題（解答）

- $\boldsymbol{S=6} \to 1+5,\ 2+3,\ 3+3$

  2 つのサイコロで 1 と 5 が出るのは，どちらのサイコロに 1 が出るかで 2 通りある（2 と 3 が出るときも同様）．

  一方，2 つのサイコロで 3 と 3 が出るのは，1 通りのみ．

  ゆえに，$S=6$ となるサイコロの出方は，

  $2+2+1=5$ 通り

2023 年度　数学科リレー講座
パスカル生誕 400 年記念
2 日目
確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

単純化したカルダーノ・ガリレオのサイコロ問題（解答）

- $\boldsymbol{S=7} \to 1+6,\ 2+5,\ 3+4$

  $2+2+2=6$ 通り

- $\boldsymbol{S=8} \to 2+6,\ 3+5,\ 4+4$

  $2+2+1=5$ 通り

$S=7$ に賭けるべき！

オリジナルのカルダーノ・ガリレオのサイコロ問題

オリジナルの問題を自分で解いてみよう．すなわち，

サイコロが 3 個の場合はいくつに賭けるべき？

2023 年度　数学科
リレー講座
パスカル生誕 400 年記念
2 日目
確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

余事象の確率

2023 年度　数学科
リレー講座
パスカル生誕 400 年記念
2 日目
確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

誕生日の問題

何人かの友人を招待して誕生日会を行う．

(1) 自分と同じ誕生日の友人が少なくとも 1 人いる確率が初めて $\frac{1}{2}$ を超えるのは，何人を招待したときか？

(2) 同じ誕生日のペアが少なくとも 1 組できる確率が初めて $\frac{1}{2}$ を超えるのは，何人を招待したときか？

ただし，1 年は 365 日とし，友人の誕生日がどの日であるかは等確率で決まるとする．

2023 年度　数学科
リレー講座
パスカル生誕 400 年記念
2 日目
確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

誕生日の問題（解答）

n 人を招待したとする．

(1) ある友人の誕生日が自分と異なる確率は $\frac{364}{365}$ であるから，n 人とも自分の誕生日と異なる確率は，

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n$$

よって，

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^n>\frac{1}{2}$$

を満たす最小の n を求めればよく，それは

$$n=253$$

2023 年度　数学科
リレー講座
パスカル生誕 400 年記念
2 日目
確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

誕生日の問題（解答）

$n-1$ 人を招待したとする．

(2) 自分を合わせた n 人中ペアが 1 つもできない確率は

$$1\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\cdots\times\frac{366-n}{365}\quad\cdots ①$$

よって，

$$1-①>\frac{1}{2}$$

を満たす最小の n を求めればよく，それは

$$n=23$$

よって，招待する人数は，22 人

2023 年度　数学科
リレー講座
パスカル生誕 400 年記念
2 日目
確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

ガチャの問題

SSR（スーパースペシャルレア）の排出率が 1%のガチャを 100 回回せば，少なくとも 1 回は当たるだろうか？ただし，排出されたものは除外されないものとする．

単純化したガチャの問題

問題を単純化してみよう．

(1) 排出率 50%のガチャを 2 回回したとき，少なくとも 1 回は当たる確率は？

(2) 確率 $\frac{1}{3}$ で排出されるガチャを 3 回回したとき，少なくとも 1 回は当たる確率は？

(3) 排出率 25%のガチャを 4 回回したとき，少なくとも 1 回は当たる確率は？

単純化したガチャの問題（解答）

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

(1) 排出率 50%のガチャを 2 回回したとき，少なくとも 1 回は当たる確率は？

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}=75\%$$

(2) 確率 $\frac{1}{3}$ で排出されるガチャを 3 回

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}\fallingdotseq 70.4\%$$

(3) 排出率 25%のガチャを 4 回

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{175}{256}\fallingdotseq 68.4\%$$

ガチャの問題（一般化）

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

確率 $\frac{1}{n}$ で排出されるガチャを n 回回して，少なくとも 1 回は当たる確率は，

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to 0.63212\cdots \quad (n\text{：十分大})$$

であることが知られている．なお，$n=0.01$ のときは約 63.4%である．したがって，

「$\frac{1}{100}$ で当たる」と「100 回やれば当たる」は全く意味が異なる！

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

期待値

くじ引きと期待値

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

当たりと外れのくじがそれぞれ 1 本ずつ，中身が見えない箱の中に入っている．このくじは 1 回 600 円で引くことができて，当たりを引けば 1000 円貰える．君たちであったら，このくじに挑戦するか？しないか？

賞金に，その賞金を貰える確率を掛けて足し上げた値を**期待値**（1657，ホイヘンス）という．今回のくじの期待値は

$$1000\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=500\text{ 円}$$

となる．

カジノルーレット

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半）
上野 大樹
カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題
余事象の確率
誕生日の問題
ガチャの問題
期待値
くじ引き
カジノルーレット
パスカルの賭け
ペテルスブルグの賭け
ナイトの問題
その他

緑色の 0 と，1〜36 の数字（そのうち 18 個は赤色，18 個は黒色）が書いてあるルーレットがあり，賭け方と倍率は次のようになっている．

- 1〜36 のどれか 1 つの数字に賭けて当たると 36 倍
- 赤か黒のどちらか一方の色に賭けて当たると 2 倍
- 1〜12，13〜24，25〜36 の 3 グループについて，どれか 1 つのグループに賭けて当たると 3 倍

賭け金を 100 円とするとき，それぞれの期待値はいくらだろうか？

カジノルーレットの期待値

- 数字に賭けたとき

$$100 \times 36 \times \frac{1}{37} \fallingdotseq 97.3 \text{ 円}$$

- 色に賭けたとき

$$100 \times 2 \times \frac{18}{37} \fallingdotseq 97.3 \text{ 円}$$

- グループに賭けたとき

$$100 \times 3 \times \frac{12}{37} \fallingdotseq 97.3 \text{ 円}$$

「ギャンブルに勝つ最高の方法は，まったく参加しないことだ。」（1564・1663，カルダーノ）

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半） 上野 大樹 カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題 余事象の確率 誕生日の問題 ガチャの問題 期待値 くじ引き カジノルーレット パスカルの賭け ペテルスブルグの賭け ナイトの問題 その他

パスカルの賭け

パスカルは「パンセ」(1658) の中で次のような議論をしている．

神が存在する確率を p とする．神を信仰する人生を送り，神が存在していれば死後に天国で永遠の命，すなわち無限大の利得を得られる．一方，世俗的な人生を送り，神が存在することで得られる利得は有限の X である．神が存在しないとき，死後の命はなく，信仰の有無に関わらず得られる利得（それぞれ $Y,\ Z$ とする）は有限である．ゆえに，信仰の人生を送る期待値と世俗的な人生を送る期待値はそれぞれ，

$$p \times \infty + (1-p)Y, \quad pX + (1-p)Z$$

となり，信仰の人生を送ることの方が合理的である．また，$p = 0$ であるかどうかを知ることのできる者はいない．

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半） 上野 大樹 カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題 余事象の確率 誕生日の問題 ガチャの問題 期待値 くじ引き カジノルーレット パスカルの賭け ペテルスブルグの賭け ナイトの問題 その他

ペテルスブルグの賭け

表が出る確率が $\frac{1}{2}$ である硬貨を表が出るまで投げ続け，その結果に応じて次のような賞金が貰えるゲームを行う．

- 1 回目に表が出たときは 2 円
- 2 回目に初めて表が出たときは $2^2 = 4$ 円
- 3 回目に初めて表が出たときは $2^3 = 8$ 円
- 4 回目に初めて表が出たときは $2^4 = 16$ 円

$\vdots$

さて，このゲームには参加費が必要だが，参加費がいくらまでならこのゲームに参加するだろうか？ただし，時間は十分にあるとする．

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半） 上野 大樹 カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題 余事象の確率 誕生日の問題 ガチャの問題 期待値 くじ引き カジノルーレット パスカルの賭け ペテルスブルグの賭け ナイトの問題 その他

ペテルスブルグの賭け（解答）

1 回目に表が出る確率は $\frac{1}{2}$

2 回目に初めて表が出るのは，裏 → 表と出るときで，その確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3 回目に初めて表が出るのは，裏 → 裏 → 表と出るときで，その確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

これを繰り返していくと，このゲームでもらえる賞金の期待値は，

$$2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{8} + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半） 上野 大樹 カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題 余事象の確率 誕生日の問題 ガチャの問題 期待値 くじ引き カジノルーレット パスカルの賭け ペテルスブルグの賭け ナイトの問題 その他

ナイトの問題

2 つの壺 A，B があり，どちらかの壺から赤玉を取り出せば，賞金 100 万円を貰える．
壺 A には，赤玉が 20 個，白玉が 20 個の合計 40 個が入っている．
壺 B には，赤玉と白玉を無作為に計 40 個入れてある（赤玉が 0 個の場合も 40 個の場合もあり得る）．
さて，君ならどちらの壺を選ぶだろうか？

期待値はどちらも 50 万円！
（自分で計算してみよう！）

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半） 上野 大樹 カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題 余事象の確率 誕生日の問題 ガチャの問題 期待値 くじ引き カジノルーレット パスカルの賭け ペテルスブルグの賭け ナイトの問題 その他

期待値は万能ではない

カジノルーレット，ペテルスブルグの賭け，ナイトの問題の例は，

人間は期待値だけでは動かない

ということを示唆している．具体的には，

- 大金を得られる [失う] かもという満足感 [恐怖感]（これらを効用という）
- リスク

によっても影響を受ける．

その他

（時間が余ったら...）

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半） 上野 大樹 カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題 余事象の確率 誕生日の問題 ガチャの問題 期待値 くじ引き カジノルーレット パスカルの賭け ペテルスブルグの賭け ナイトの問題 その他

婚活パーティー必勝 (?) 法

ある日，X 氏は必ず結婚相手を 1 人決めるという決意の下で，婚活パーティーに参加することにし，ある 4 人と無作為な順番で一対一で話すことができる機会（これをお見合いと呼ぶことにする）を得た．

ところが，非常にプライバシー保護が厳しいこの婚活パーティーでは，ある人と 1 回お見合いした後にその人と話したり連絡を取ることができる機会は与えられていない．また，ある人と結婚を決めたらその時点でお見合いは終了であり，二股は認められていない．

そこで，X 氏は確率論的に最適であろう次のような戦略を取ることにした．

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半） 上野 大樹 カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題 余事象の確率 誕生日の問題 ガチャの問題 期待値 くじ引き カジノルーレット パスカルの賭け ペテルスブルグの賭け ナイトの問題 その他

婚活パーティー必勝 (?) 法

1 番目の相手は断り，2 番目以降の相手がこれまでのお見合い相手よりも良かったら結婚を申し込む

後から考えたとき，4 人の名前は望ましい順にそれぞれ A さん，B さん，C さん，D さんであった（もちろん，この 4 人とどのような順番でお見合いできるかは事前にはわかっていない）．

上記のような戦略下で，X 氏が A さん，B さん，C さん，D さんと結婚する確率はどのぐらいか．

ただし，X 氏が申し込んだ結婚を断られることはないものとする．

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半） 上野 大樹 カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題 余事象の確率 誕生日の問題 ガチャの問題 期待値 くじ引き カジノルーレット パスカルの賭け ペテルスブルグの賭け ナイトの問題 その他

かなり使えます

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

2023 年度　数学科 リレー講座 パスカル生誕 400 年記念 2 日目 確率論（後半） 上野 大樹 カルダーノ・ガリレオのサイコロ問題 余事象の確率 誕生日の問題 ガチャの問題 期待値 くじ引き カジノルーレット パスカルの賭け ペテルスブルグの賭け ナイトの問題 その他

結果発表

A：$\dfrac{11}{24}$

B：$\dfrac{7}{24}$

C：$\dfrac{4}{24}$

D：$\dfrac{2}{24}$

数学科リレー講座 3 日目
パスカルの定理とその周辺

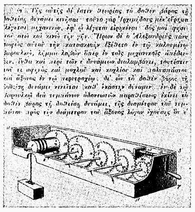
Sai Daishi, Miyazaki Atsushi
August 19, 2023
海城中学高等学校

今日の流れ

I. パッポス (パップス) の定理, デザルグの定理について (宮崎, 35 分)
II. パスカルの定理について (蔡先生, 25 分)
III. パンセ (パスカルの遺著) について (春木先生, 20 分)

I, II ではパスカルが若干 16 歳のときに明らかにしたパスカルの定理とその周辺について, 後半は彼の遺著「パンセ」について紹介します. お楽しみに.

パッポスについて



パッポス『数学論集』第 8 巻, 命題 10 の 1 ページ

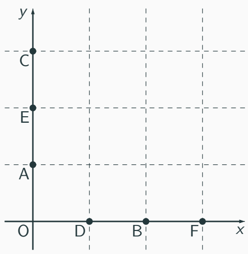
パップスともいう. パッポス（Pappus）はアレクサンドリアで 4 世紀前半 (3 世紀後半という説もある.) に活躍した数学者. ギリシア最後の幾何学者と言われている.

パスカルについて

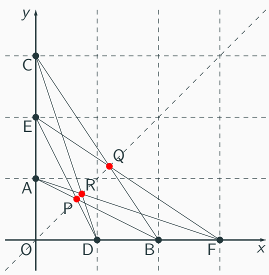
ブレーズ・パスカル (Blaise Pascal, 1623-1662) は, フランスの哲学者, 物理学者, 思想家, 数学者と多くの肩書きをもつ. 神童として数多くのエピソードを残した早熟の天才で, その影響は多岐に渡った.

考えてみよう 1

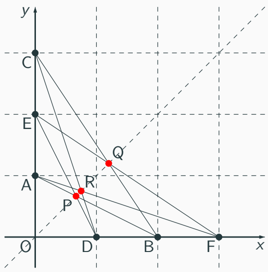
下図において, 2 直線 AB と DE の交点を P, 2 直線 BC と EF の交点を Q, 2 直線 CD と FA の交点を R とするとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあるか？



解答



なぜ一直線上にあるのか



解答

それぞれの直線の方程式は

$$\text{直線 AB} : y = -\frac{1}{2}x + 1, \quad \text{直線 AF} : y = -\frac{1}{3}x + 1,$$
$$\text{直線 ED} : y = -2x + 2, \quad \text{直線 EF} : y = -\frac{2}{3}x + 2,$$
$$\text{直線 CD} : y = -3x + 3, \quad \text{直線 CB} : y = -\frac{3}{2}x + 3.$$

2 直線 AB, ED の交点 P の座標は $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

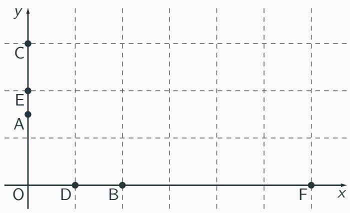
2 直線 EF, CB の交点 Q の座標は $\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

2 直線 CD, AF の交点 R の座標は $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

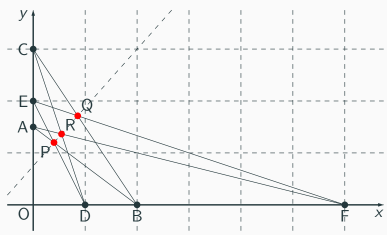
したがって, 3 点 P, Q, R はすべて直線 $y = x$ 上にある. □

考えてみよう 2

下図において, 2 直線 AB と DE の交点を P, 2 直線 BC と EF の交点を Q, 2 直線 CD と FA の交点を R とするとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあるか？

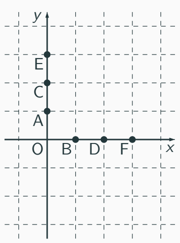


解答

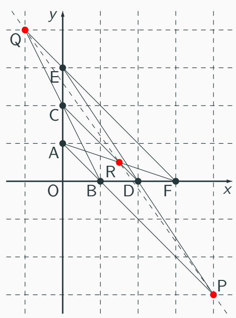


考えてみよう 3

下図において, 2 直線 AB と DE の交点を P, 2 直線 BC と EF の交点を Q, 2 直線 CD と FA の交点を R とするとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあるか？

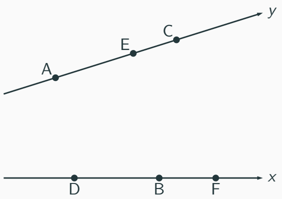


解答

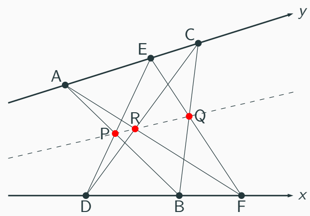


考えてみよう 4

下図において, 2 直線 AB と DE の交点を P, 2 直線 BC と EF の交点を Q, 2 直線 CD と FA の交点を R とするとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあるか？



解答



パッポスの定理

2 直線 l, m 上にそれぞれ 3 点があるとき, l, m の点を交互にとって 6 点に順序をつけ, 隣り合った 2 点を結ぶ線分をとると, 6 個の順序のついた線分ができる. それらの線分の定める直線で, 1 番目と 4 番目のように 3 つとびにとった 3 組の 2 直線の交点は, 一直線上にある.

例えば

2 直線 l, m 上の点を交互に A, B, C, D, E, F と名づける.

↓

線分 AB, BC, CD, DE, EF, FA を考える.

↓

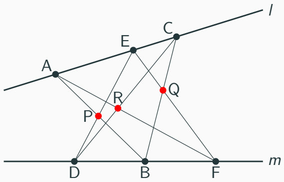
直線 AB と DE の交点を P, 直線 BC と EF の交点を Q, 直線 CD と FA の交点を R とする.

↓

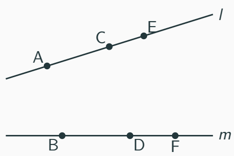
3 点 P, Q, R は一直線上にある.

パッポスの定理 -簡易版-

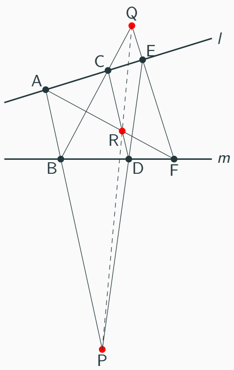
直線 l 上に 3 点 A, E, C, 直線 m 上に 3 点 D, B, F があって, 2 直線 AB と DE が点 P で, 2 直線 BC と EF が点 Q で, 2 直線 CD と FA が点 R でそれぞれ交わるならば, 3 点 P, Q, R は一直線上にある.



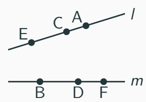
点の位置をかえてみた 1



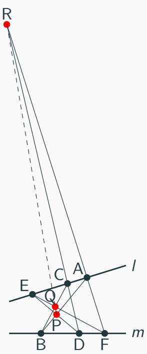
点の位置をかえてみた 1 解答



点の位置をかえてみた 2

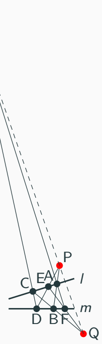


点の位置をかえてみた 2 解答



点の位置をかえてみた 3

点の位置をかえてみた 3 解答

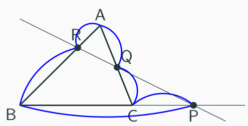


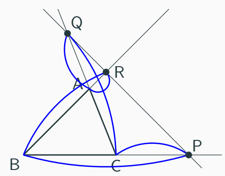
パッポスの定理の証明の準備-メネラウスの定理-

△ABC 上の 3 辺 BC, CA, AB またはその延長が, 頂点を通らない 1 つの直線と交わる点をそれぞれ P, Q, R とするとき,

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

が成り立つ.



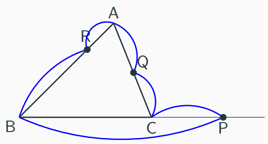


パッポスの定理の証明の準備-メネラウスの定理の逆-

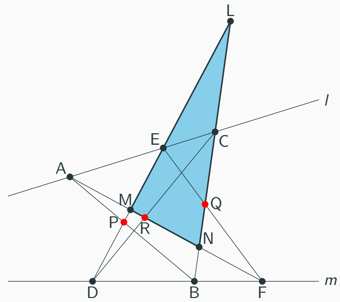
$\triangle$ABC 上の 3 辺 BC, CA, AB またはその延長上にそれぞれ点 P, Q, R があり，次の 2 つの条件を満たせば，3 点 P, Q, R は一直線上にある．

(i) 3 点 P, Q, R のうち，1 個または 3 個が辺の延長上の点である．

(ii) $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \times \dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$ が成り立つ．



パッポスの定理の証明



$\triangle$LMN と直線 EQF, CRD, APB にそれぞれ注目すると，メネラウスの定理から，

$$\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{NF}} \times \frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{ME}} \times \frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{LQ}} = 1,\ \frac{\mathrm{DL}}{\mathrm{MD}} \times \frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{LC}} \times \frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{NR}} = 1,\ \frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{MP}} \times \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{LB}} \times \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{NA}} = 1.$$

両辺をそれぞれかけて

$$\left(\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{LQ}} \times \frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{NR}} \times \frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{MP}}\right) \times \left(\frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{ME}} \times \frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{LC}} \times \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{NA}}\right) \times \left(\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{NF}} \times \frac{\mathrm{DL}}{\mathrm{MD}} \times \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{LB}}\right) = 1.$$

ここで，$\triangle$LMN と直線 l, m について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{ME}} \times \frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{LC}} \times \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{NA}} = 1, \quad \frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{NF}} \times \frac{\mathrm{DL}}{\mathrm{MD}} \times \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{LB}} = 1$$

であるから，これらと上の式より，

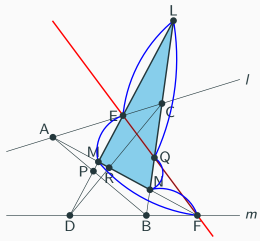
$$\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{LQ}} \times \frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{NR}} \times \frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{MP}} = 1.$$

メネラウスの定理の逆より，3 点 P, Q, R は一直線上にある． □

補足 1

$\triangle$LMN と直線 EQF において，メネラウスの定理から，

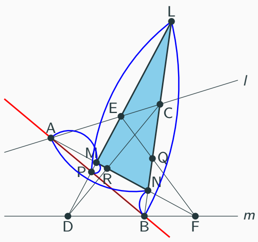
$$\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{NF}} \times \frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{ME}} \times \frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{LQ}} = 1.$$



補足 2

$\triangle$LMN と直線 APB において，メネラウスの定理から，

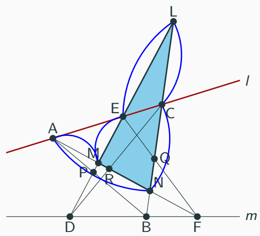
$$\frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{MP}} \times \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{LB}} \times \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{NA}} = 1.$$



補足 3

$\triangle$LMN と直線 l において，メネラウスの定理から，

$$\frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{ME}} \times \frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{LC}} \times \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{NA}} = 1.$$

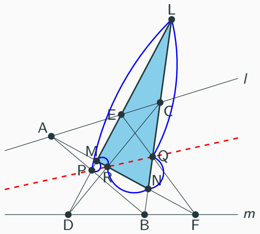


補足 4

$\triangle$LMN と 3 点 P, Q, R において，

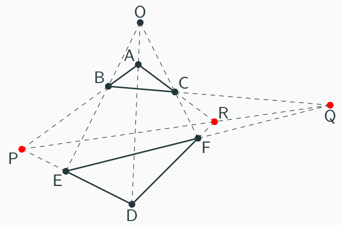
$$\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{LQ}} \times \frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{NR}} \times \frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{MP}} = 1$$

が成り立つから，メネラウスの定理の逆より，3 点 P, Q, R は一直線上にある．

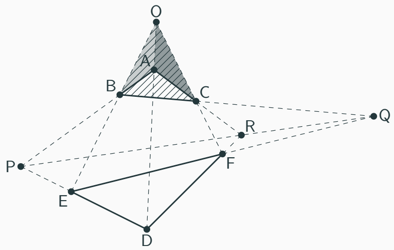


デザルグの定理

下図のように $\triangle$ABC と $\triangle$DEF があって，直線 AD と BE と CF が 1 点 O で交わるとする．このとき，AB と DE の交点を P, BC と EF の交点を Q, CA と FD の交点を R とすれば，3 点 P, Q, R は一直線上にある．



デザルグの定理の証明



上図において．$\triangle$OAB と直線 DE において，メネラウスの定理から

$$\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{OD}} \times \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}} \times \frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{BE}} = 1.$$

同様に，$\triangle$OBC と直線 EF において，

$$\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{OE}} \times \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BQ}} \times \frac{\mathrm{FO}}{\mathrm{CF}} = 1.$$

同様に，$\triangle$OCA と直線 FD において，

$$\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{OF}} \times \frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{CR}} \times \frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{AD}} = 1.$$

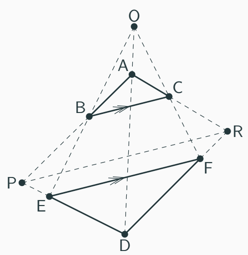
両辺をそれぞれかけて

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}} \times \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BQ}} \times \frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{CR}} = 1. \qquad \cdots ①$$

メネラウスの定理の逆より，3 点 P, Q, R は一直線上にある．　□

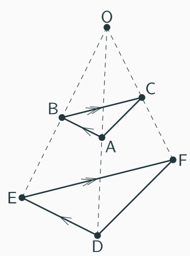
デザルグの定理 (平行 ver. その 1)

下図のように $\triangle$ABC と $\triangle$DEF があって，直線 AD と BE と CF が 1 点 O で交わるとし，AB と DE の交点を P, CA と FD の交点を R とする．このとき，BC // EF ならば，PR もこれら 2 直線に平行である．



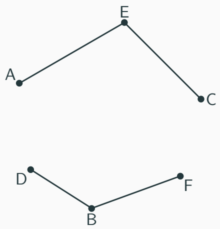
デザルグの定理 (平行 ver. その 2)

下図のように $\triangle$ABC と $\triangle$DEF があって，直線 AD と BE と CF が 1 点 O で交わるとする．このとき，AB // DE, BC // EF ならば，CA // FD である．

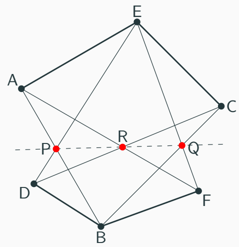


考えてみよう 5

下図において, 2 直線 AB と DE の交点を P, 2 直線 BC と EF の交点を Q, 2 直線 CD と FA の交点を R とするとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあるか？

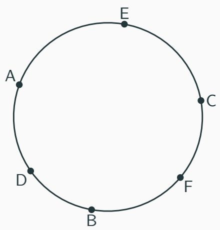


解答

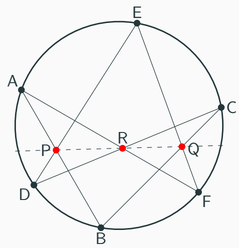


考えてみよう 6

下図において, 2 直線 AB と DE の交点を P, 2 直線 BC と EF の交点を Q, 2 直線 CD と FA の交点を R とするとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあるか？



解答



※ 実は考えてみよう 5 の 6 点も同一円周上の点であった.

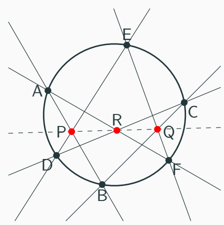
パスカルの定理

円周上に 6 点があるとき, この 6 点に順序をつけ, 隣り合った 2 点を結ぶ線分をとると, 6 個の順序のついた線分ができる. それらの線分の定める直線で, 1 番目と 4 番目のように 3 つとびにとった 3 組の 2 直線の交点は, 一直線上にある.

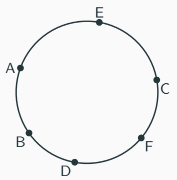
(この直線をパスカル線という.)

パスカルの定理-簡易版-

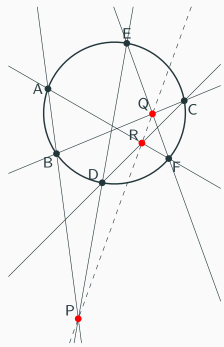
円周上に 6 点 A, B, C, D, E, F があって, 2 直線 AB と DE が点 P で, 2 直線 BC と EF が点 Q で, 2 直線 CD と FA が点 R でそれぞれ交わるならば, 3 点 P, Q, R は一直線上にある.



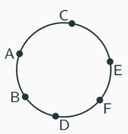
点の位置をかえてみた 4



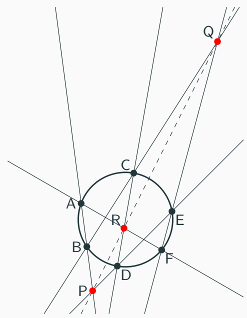
点の位置をかえてみた 4 解答



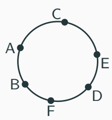
点の位置をかえてみた 5



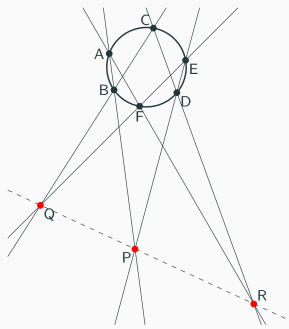
点の位置をかえてみた 5 解答



点の位置をかえてみた 6



点の位置をかえてみた 6 解答

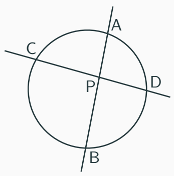


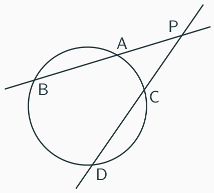
方べきの定理

円 O の 2 つの弦 AB, CD, またはそれらの延長が点 P で交わるとき,

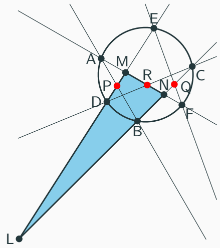
$$\mathrm{PA}\times\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\times\mathrm{PD}$$

が成り立つ.

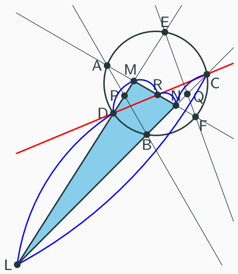




パスカルの定理の証明

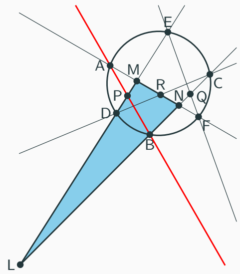


AB, BC, CD, DE, FE, FA を 1 つおきにとった 2 直線 BC と DE, DE と FA, FA と BC の交点をそれぞれ L, M, N とする.



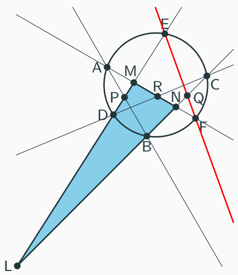
△LMN と直線 CRD において, メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{LC}}{\mathrm{CN}}\cdot\frac{\mathrm{NR}}{\mathrm{RM}}\cdot\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{DL}}=1. \qquad \cdots ①$$



△LMN と直線 APB において, メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AM}}\cdot\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PL}}\cdot\frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{BN}}=1. \qquad \cdots ②$$



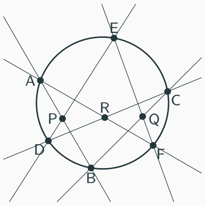
△LMN と直線 EQF において, メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{EL}}\cdot\frac{\mathrm{LQ}}{\mathrm{QN}}\cdot\frac{\mathrm{NF}}{\mathrm{FM}}=1. \qquad \cdots ③$$

①, ②, ③の両辺をそれぞれかけて,

$$\left(\frac{\mathrm{LC}}{\mathrm{CN}}\cdot\frac{\mathrm{NR}}{\mathrm{RM}}\cdot\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{DL}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AM}}\cdot\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PL}}\cdot\frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{BN}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{EL}}\cdot\frac{\mathrm{LQ}}{\mathrm{QN}}\cdot\frac{\mathrm{NF}}{\mathrm{FM}}\right)=1$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{LB}\cdot\mathrm{LC}}{\mathrm{LD}\cdot\mathrm{LE}}\cdot\frac{\mathrm{NA}\cdot\mathrm{NF}}{\mathrm{NC}\cdot\mathrm{NB}}\cdot\frac{\mathrm{MD}\cdot\mathrm{ME}}{\mathrm{MA}\cdot\mathrm{MF}}\cdot\left(\frac{\mathrm{NR}}{\mathrm{RM}}\cdot\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PL}}\cdot\frac{\mathrm{LQ}}{\mathrm{QN}}\right)=1 \qquad \cdots ④$$



この円と点 L, M, N において, それぞれ方べきの定理より,

$$\begin{cases} \mathrm{LB}\cdot\mathrm{LC}=\mathrm{LD}\cdot\mathrm{LE} \\ \mathrm{MD}\cdot\mathrm{ME}=\mathrm{MA}\cdot\mathrm{MF} \\ \mathrm{NA}\cdot\mathrm{NF}=\mathrm{NC}\cdot\mathrm{NB} \end{cases} \qquad \cdots ⑤$$

④, ⑤より

$$\frac{\mathrm{NR}}{\mathrm{RM}}\cdot\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PL}}\cdot\frac{\mathrm{LQ}}{\mathrm{QN}}=1. \qquad \cdots ⑥$$

したがって, △LMN と 3 点 P, Q, R について, 点 Q は辺 LN の延長上の点であるから, ⑥と合わせてメネラウスの定理の逆より, 3 点 P, Q, R は一直線上にある. □

参考文献

- 一松信・竹之内脩編, 改訂増補 新数学事典, 大阪書籍, 1991
- 石谷茂, 大学入試数学の五面相 (上), 現代数学社, 1990
- カジョリ・小倉金之助 補訳, 復刻版 カジョリ 初等数学史, 共立出版, 1997
- 難波誠, 平面図形の幾何学, 現代数学社, 2008

パンセ 入門

考える葦

パスカルは哲学者？

- 1623年　フランスのクレルモンで生まれる。
- 1639年　「円錐曲線試論」発表 （パスカルの定理）
- 1642年　機械式計算機 完成 （プログラミング言語 Pascal）
- 1653年　「パスカルの原理」発表 （hPa ヘクトパスカル）
- 1654年　「算術三角形」発表（確率論の始まり）
- 1662年　５ソルの馬車（乗合馬車）創業，６か月後(8/19)死去
- 1669年　「パンセ」出版

モラリストと言われる思想家の代表

「パンセ」とは

- フランス語で Pensées
- 「考えられたこと，考え，思考，思想」という意味
- 転じて瞑想録，随想録などと呼ばれる。
- 将来，本を出版するために書き溜めた断片（メモ）の集まり
- 自由思想家をキリスト教に回心させる本が書きたかったらしい。

考える葦

「人間は一本の葦にすぎない。
自然のうちで最も か弱いもの、
しかしそれは考える葦だ。」

L'homme n'est qu'un roseau, le plus faible de la nature,
mais c'est un roseau pensant.

クレオパトラの鼻

「クレオパトラの鼻。もしそれがもう少し小ぶりだったら、地球の表情は一変していたことだろう。」

二つの無限

「というのも、つまるところ、自然の中での人間とは何なのか。全体に対しては虚無、虚無に対しては全体、無と全体の間では中間で、**両極端を理解することから無限に隔てられている。**」

人間の想像も及ばない広大な宇宙空間が存在する一方，ダニの血液の中の水滴の中にさらに極小の世界が含まれている。人間はこれらの二つの無限（無限大と無限小）を理解することから，無限に隔てられている。という内容

パスカルはデカルトが嫌い

「私はデカルトを赦すことはできない。彼はその哲学の全体にわたって、できることなら、神なしですませたかったのだ。しかし世界を動かすためには、神に最初のつまはじきをさせないわけにはいかなかった。それがすめば、おはらい箱というわけだ。」

デカルト
「我思う、ゆえに我あり」（演繹法）
座標幾何を導入
パスカルより27歳年上

パスカルの賭け

「きみは、もし勝てば、すべてを獲得する。もし負けても、何も失うものはない。だから迷うことなく、**神がいるほうに賭けるべきだ。**」

「回心」してキリスト教に傾倒

ガリレオ裁判（1616, 1633）

ガリレオ＝ガリレイ

「それでも地球は動いている」

地動説を本で解説し，異端であるとローマ教皇庁から終身禁固刑を言い渡された。

（そのときにつぶやいたとされる）

パンセにおける人間観察

「幾何学の精神」と「繊細の精神」

幾何学／繊細
　本当の雄弁は雄弁をばかにする。本当の道徳は道徳をばかにする。すなわち判断の道徳は知性の道徳をばかにする。それは規則にとらわれないのだから。
　というのも、判断とは、直感が関与する領域だからだ。ちょうど学問が知性の領域であるように。繊細は判断の持ち分であり、幾何学は知性の持ち分である。
　哲学をばかにすること、これこそ本当に哲学することだ。

パンセにおける人間観察

気晴らし

人々は、死もみじめさも無知も免れることができないので、そんなことを考えずにすませることで幸せになろうとした。

パンセにおける人間観察

自己愛は邪欲

自己愛はできることなら、真実を根絶やしにしたいのだが、真実自体を破壊することはできないので、それを自分の認識と他人の認識のうちで可能なかぎり破壊する。つまりあらゆる注意を払って、おのれの欠点を他人にも自分にも覆い隠す。

パンセにおける人間観察

〈私〉とは憎むべきもの

要するに、〈私〉には二つの性質がある。それは自分をすべての中心に据える点で、それ自体として不正であり、他者を従属させようと望む点ではた迷惑である。というのも、各々の〈私〉は互いに敵であり、あわよくば他のすべての〈私〉の暴君になろうと望んでいるのだから。きみは迷惑は取り除くが、不正は取り除かない。

参考文献

- 「パンセ」パスカル 著　塩川徹也 訳　岩波文庫
- 「寝るまえ5分のパスカル」アントワーヌ・コンパニョン 著
- 「パスカル『パンセ』」(100分de名著) 鹿島 茂 著