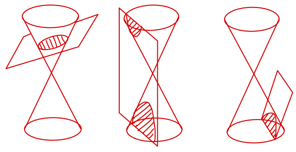
後半 3日間の目標 ：ブリアンションの定理を証明する．

4日目前半
担当：柴山太郎

> **ブリアンションの定理**
> 円錐曲線に外接する六角形 ABCDEF の3組の対角線 AD, BE, CF は1点で交わる．

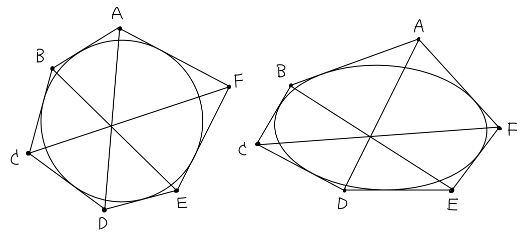
円錐曲線とは ： 楕円や円などを指す．

※ 円錐をいろいろな平面で切った切り口の曲線として定められる．



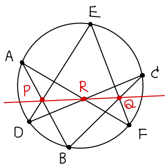
楕円　双曲線　放物線

Q．ブリアンションの定理を定規でたしかめてみよう！



ブリアンションの定理を示すために，3日目にやった パスカルの定理をパワーアップさせておく．

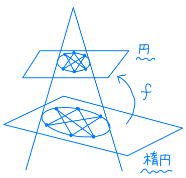
> **パスカルの定理（改）**
> 円錐曲線に内接する六角形の3組の対辺の交点は一直線上にある．



3日目は円のときのみを扱ったが，"円錐曲線" に拡張できる！

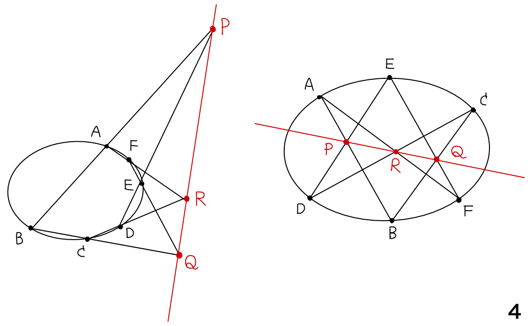
※ 成り立つことは感覚的に理解できる．

（右のような対応 f により，円の場合に帰着できるからである！）



Q．パスカルの定理を使う練習をしてみよう！

（注）六角形ABCDEF に適用すること．



これから，ブリアンションの定理を示すための準備をする．

定義（円錐曲線）

$a, b, c, f, g, h \in \mathbb{R}$ として，

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \cdots ①$$

をみたす点 (x, y) の集合を，円錐曲線という．

※さっき切り口として定めた円錐曲線は ① のような方程式で定められるのである．（これは認めてもらおう）

定義（極線）

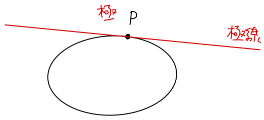
① で与えられる円錐曲線 Γ に対し，直線

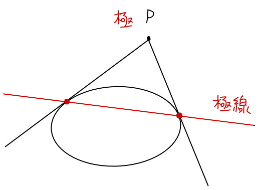
$$ax_0x + hx_0y + hy_0x + by_0y + gx + gx_0 + fy + fy_0 + c = 0 \quad \cdots ②$$

を点 $P(x_0, y_0)$ の 極線 という． また，P を 極 という．

式を見ても極線と極はなかなかイメージができないが，，，

Q． 極P の極線をひいてみよ．

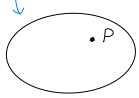




極線のイメージ

極から2本の接線をひいて，2つの接点を通る直線をひく．

※ イメージしづらいが，必ずどこかにはひけるはず．．．



ブリアンションの定理を示すための準備にとりかかる.

補題1　円錐曲線Γにおける点Pの極線ℓ上に点Qをとると、Qの極線はPを通る.

(証明) Q(x_1, y_1)とすると、②に代入して成立するから、

$a x_0 x_1 + h x_0 y_1 + h y_0 x_1 + b y_0 y_1 + g x_1 + g x_0 + f y_1 + f y_0 + c = 0$ ---③

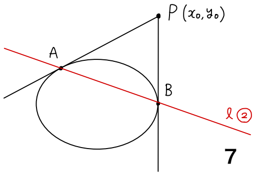
Qの極線は、

$a x_1 x + h x_1 y + h y_1 x + b y_1 y + g x + g x_1 + f y + f y_1 + c = 0$ ---④

であり、これにP(x_0, y_0)を代入すると、

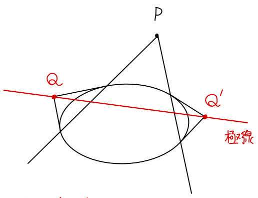
③より成立する.

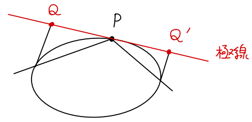
よって PはQの極線上にある. □

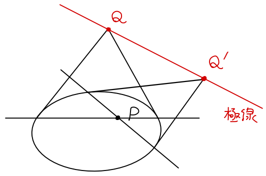


※証明は式に代入するだけでカンタン!!

Q. もう一度 極Pの極線をひいてみよ.







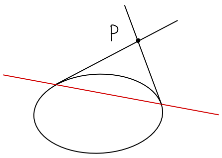
Lem.1 より、

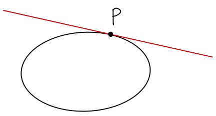
$\begin{cases} \text{PはQの極線上} \\ \text{PはQ'の極線上} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{QはPの極線上} \\ \text{Q'はPの極線上} \end{cases}$

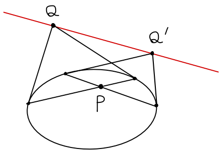
⇒ QQ'はPの極線

※ Lem.1を利用すると、イメージできた!!

Q. 極線ℓに対する極Pを求めよ.







※ 極と極線は1対1に対応している気がしてきたか!?

補題2　円錐曲線ΓにおけるP,Q,Rの極線をそれぞれℓ,m,nとする. P,Q,Rが同一直線上にあるならば、ℓ,m,nは1点で交わるまたは平行である.

(証明)

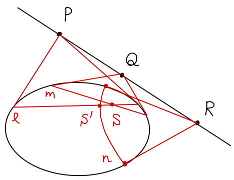
ℓとmの交点をSとすると、

Sの極線はPQとなる. (∵補題1)

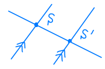
同様に ℓとnの交点をS'とすると、

S'の極線はPRとなる.

極線が一致するので、その極であるSとS'は一致する. □



※ 平行の場合の証明は不要!!
(右図参照)

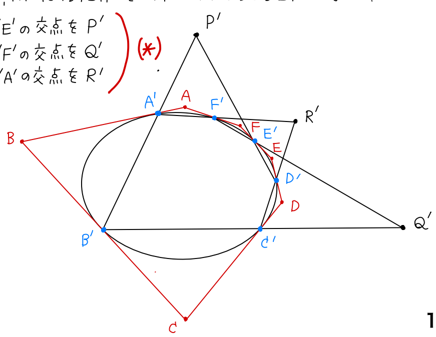


ブリアンションの定理の証明

図のように、A',B',C',D',E',F'をとり、六角形A'B'C'D'E'F'を考える.

$\left.\begin{cases} \text{A'B'とD'E'の交点をP'} \\ \text{B'C'とE'F'の交点をQ'} \\ \text{C'D'とF'A'の交点をR'} \end{cases}\right\}$ (*)

とする.



六角形A'B'C'D'E'F'において、パスカルの定理より、

P',Q',R'は一直線上にある.

$\begin{cases} \text{P'はBの極線上} \\ \text{P'はEの極線上} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{BはP'の極線上} \\ \text{EはP'の極線上} \end{cases}$ (∵Lem.1)

⇒ BEはP'の極線 --- ①

同様にして、CFはQ'の極線 --- ②

ADはR'の極線 --- ③

P',Q',R'は一直線上なので、①,②,③からLem.2より、

AD, BE, CFは1点で交わる. □

(注)六角形の対角線AD,BE,CFが平行になることはない!!

上記の証明には(*)の部分に穴がある.
P',Q',R'がとれない場合を別個に証明しなくてはならない...

2023 年度 数学科リレー講座 4 日目 (後半) 射影直線・射影平面

担当：吉村歩美

2023 年 8 月 21 日

ブリアンションの定理の証明で考えたパターン

- どの対辺も平行でない (交点が 3 つ存在)
- 一組の対辺が平行
- 二組の対辺が平行
- 三組の対辺が平行

→「交点がない」という例外を考える必要性から場合分けをした

もう少しスマートにブリアンションの定理を眺めることはできないか？

→ つまり, 交点の有無で場合分けをせず, ひとまとめに論じることができないか？

射影平面という概念を導入する.

(具体的な議論に入る前に) 発想！

私たちがいま考えている「ふつうの」平面 (ユークリッド平面) においては,

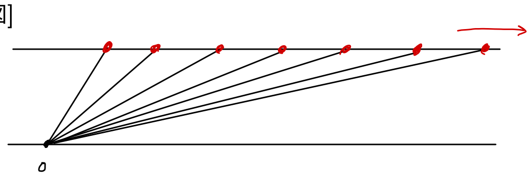
平行な 2 直線は交点をもたない.

が, 次のように考えることはできないか？

(具体的な議論に入る前に) 発想！

なす角がとても小さい 2 直線の場合は「とても遠く」に交点をもつ.

[図]



(具体的な議論に入る前に) 発想！

平行な 2 直線なら？
なす角が小さくなるにしたがって交点の位置は遠くなっていくのだから, 限りなくなす角を小さくしていったならば, 「無限に遠く」に交点を持つと捉えることができる！

平行な 2 直線は無限遠点で交わると捉えられる！

「射影直線」$\mathbb{P}^1$ のイメージ

今までの話を踏まえて，ひとまず，「射影直線」を以下のようなものであると考えることにしよう．
(ちゃんとした定義は段階を踏んで説明する！)

Definition (仮)

射影直線 $\mathbb{P}^1$ とは，通常の直線に「無限遠点」なるものを加えたもの

準備

射影直線の説明をするために，以下の用語を準備する．

- 同値関係
- 同値類

関係 $\sim$ の定義

Definition

実数 x_1, x_2, y_1, y_2 について，関係 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ とは，$(x_1, y_1) = k(x_2, y_2)$ をみたすような 0 でない実数 k があることとする．
なお，$(0, 0)$ は考えない．

Example

$(1, 2) \sim (2, 4)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \sim \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ など

同値関係の定義

Definition (同値関係)

同値関係 R とは，以下の 3 つの条件をみたすような関係のことである．

- aRa が成り立つ．　(反射律)
- aRb ならば bRa である．　(対称律)
- aRb かつ bRc ならば aRc である．　(推移律)

Example (通常の等号 $=$)

- $a = a$
- $a = b$ ならば $b = a$
- $a = b$ かつ $b = c$ ならば $a = c$ である．

練習 1

次のうち，同値関係であるものを選べ．

- $<$　(実数の大小関係)
- 三角形の合同関係 $\equiv$
- 三角形の相似関係

練習 1(解答)

- $<$　(大小関係)　$\cdots$ ×
  $a < b$ かつ $b < c$ ならば $a < c$ である (推移律が成り立つ) が，それ以外の性質は成り立たない．
- 三角形の合同関係　$\cdots$ ○
- 三角形の相似関係　$\cdots$ ○

練習 2

Definition (関係 $\sim$ の定義 (再掲))

実数 x_1, x_2, y_1, y_2 について，関係 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ とは，$(x_1, y_1) = k(x_2, y_2)$ をみたすような 0 でない実数 k があること．

関係 $\sim$ について，これが同値関係であることを示せ．

$\longrightarrow$ 同値関係の性質をすべて満たすか確かめればよい!

練習 2(解答)

- $(x_1, y_1) = 1 \cdot (x_1, y_1)$ となり，$k = 1$.

  $(x_1, y_1) \sim (x_1, y_1)$

- $(x_1, y_1) = k(x_2, y_2)$ であるとき，$(x_2, y_2) = \dfrac{1}{k}(x_1, y_1)$ であるから

  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ ならば $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$.

練習 2(解答)

- $(x_1, y_1) = k(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2) = l(x_3, y_3)$ であるとき，
  $(x_1, y_1) = k \cdot l(x_3, y_3)$ であるから，

  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$ ならば $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.

$\longrightarrow$ 以上より，関係 $\sim$ は同値関係である!

同値類の定義

Definition (同値類)

同値関係にある要素全体の集まりを同値類という．

Example

$(1, 2) \sim (2, 4) \sim (3, 6) \sim \cdots$
などの場合，集合 $\{(1, 2),\ (2, 4),\ (3, 6), \cdots\}$ が，同値関係 $\sim$ に関しての「同値類」になる．

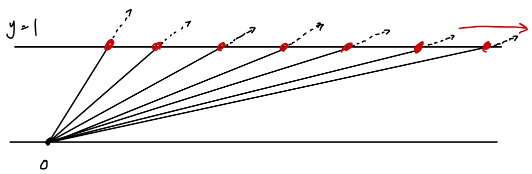
この集合からひとつ代表元をとって，同値類を $[1, 2]$ などと表す．代表元のとり方は一通りではない．

射影直線とは？

$\sim$ という同値関係についての同値類たちをすべて集めた集合を射影直線という．

射影直線とは？

射影直線のイメージの話をしたときにでてきた図を思い出してみよう．[図]



射影直線とは？

- 原点 O から直線 $y = 1$ に向かって光を照射したとしたときに，光線 (直線) は $y = 1$ 上のある 1 点にぶつかる．
- 原点からの光線の「方向」と $y = 1$ 上のある点を対応させたものが「射影直線」のイメージそのものである！

射影平面 $\mathbb{P}^2$ の定義

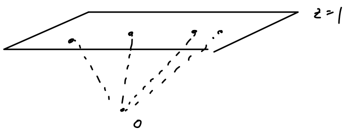
射影直線の定義を思い出してみながら，射影平面の定義を眺めてみよう．

Definition

- 実数 $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ について，関係 $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ とは，$(x_1, y_1, z_1) = k(x_2, y_2, z_2)$ をみたすような 0 でない実数 k があること．
なお，$(0, 0, 0)$ は考えない．
- この同値関係 $\sim$ についての同値類たちをすべて集めた集合を射影平面という．

射影平面のイメージ

射影直線の話を思い出しつつ，射影平面のイメージをつかんでおこう．
[図]



射影平面のイメージ

- 射影平面では，原点を通る直線と，その直線と平面 $z = 1$ との共有点を対応させて考えている．
- つまり，直線を原点 (光源) からの光線と捉えるとき，それが $z = 1$ というスクリーンにうつった点と同一視されるということ！
- 射影平面上の「点」とは，ふつうの座標空間における，原点を通る直線のこと！

斉次座標

$z = 1$ 上の点 $(x, y, 1)$ を，ふつうの平面上の点と捉えると，(x, y) という座標で表すことができる．これを射影平面上の点として表すときは，

$$[x, y, 1]$$

のように表す．これを「斉次座標」という．

斉次座標の性質をかんたんに

- $[x, y, 1] = [kx, ky, k]$ が成り立つ．
- $[x, y, 0]$ は「無限遠点」に対応している．

「射影平面への導入」ひと区切り

- このように射影平面上で考えてやれば，ブリアンションの定理の証明は，交点の有無で場合分けせずともすっきりと記述される．
- ユークリッド平面上で考えた証明 (前半でみた証明) はもちろん数学的に正しいが，射影平面上の定理であると考えたほうが，とても「自然」であることがわかる．

「射影平面への導入」ひと区切り

他にも，射影平面上で眺めると自然に捉えることのできる定理が存在する．5 日目は，射影平面の具体的なイメージを携えて，そんな定理のひとつ「デザルグの定理」を見ていこう．

パスカル生誕 400 年記念
2023 年度数学科リレー講座

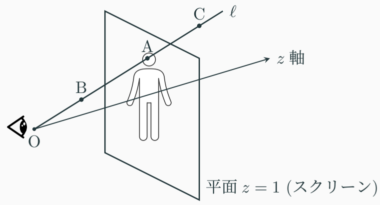
射影平面上の直線からデザルグの定理まで

NAGASAWA Kyosuke

August 22, 2023

座標空間 $\mathbb{R}^3$ における原点を通る直線を点と見るのは自然なこと

★ 我々は, 3 次元空間上でものを見ていると言っても, 結局はある平面上における点でしか, ものを見ていない.



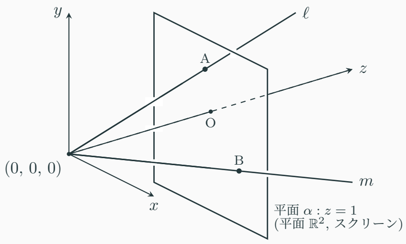
A でも, B でも, C でも見ている点はすべて同じ

→ 直線 ℓ 上の点はすべて同じ点とみなせる

→ **直線を点とみる！(点を直線とみる)**

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の点とは

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の "点" とは, 座標空間 $\mathbb{R}^3$ における "原点を通る直線" のことである (図の直線 ℓ や m が $\mathbb{P}^2$ 上の "点" である). つまり, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ とは, $\mathbb{R}^3$ における原点を通る直線すべての集まりのことである.



射影平面 $\mathbb{P}^2$ は普通の平面 $\mathbb{R}^2$ を含んでいる

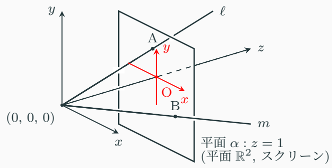
とは言っても, 直線を点と見るのは何かと考えにくい. そこで

↓

原点を通る直線 ℓ と, ℓ と平面 $\alpha : z = 1$ との交点 A を**同一視する**ことにより, A を射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の点とみる (m に対応するのは B).

このように見ると, 射影平面 $\mathbb{P}^2$(の一部) は平面 α だと考えられる.

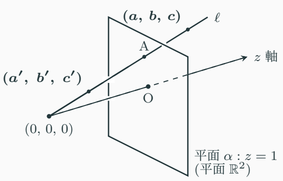
さらに, 平面 $\alpha : z = 1$ を平面 $\mathbb{R}^2$(xy 平面のこと) と考えても全く問題ない. つまり, **射影平面 $\mathbb{P}^2$ は平面 $\mathbb{R}^2$ を含んでいる**とみれる.



射影平面 $\mathbb{P}^2$ の斉次(せいじ)座標とは

次に, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ に座標を導入したい.

そもそも, $\mathbb{P}^2$ 上の点とは, $\mathbb{R}^3$ における原点を通る直線であった. そこで, 原点を通る直線 ℓ 上に点 $(a,\ b,\ c)$ があるとき, $\mathbb{P}^2$ 上の点である ℓ の $\mathbb{P}^2$ における座標を $(a,\ b,\ c)$ と考えるのは自然である. しかし, 直線 ℓ 上には他にも無数に点があり, 点 $(a',\ b',\ c')$ を ℓ 上の点とすると, $(a',\ b',\ c')$ も ℓ の $\mathbb{P}^2$ における座標になってしまう. つまり, $(a,\ b,\ c)$ と $(a',\ b',\ c')$ が同じものでなければいけない.



射影平面 $\mathbb{P}^2$ の斉次座標とは

★原点を通る直線上の (原点以外の) 点を $(a,\ b,\ c)$ とすると, その直線上のすべての点は $(ta,\ tb,\ tc)$ と表せる

ことを利用すれば, 先ほどの ℓ の $\mathbb{P}^2$ における座標は, **比の形を**とって

$$[\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} : \boldsymbol{c}]$$

とすればよいことに気が付くだろう. なぜなら, このように表すと

$$[a' : b' : c'] = [ta : tb : tc] = [a : b : c]$$

が成立するからである.

!大注意! この座標は "比" であるから, 同じ点でも無数の表し方があることに注意. たとえば,

$[1 : 2 : 3] = [2 : 4 : 6] = [-\frac{2023}{5} : -\frac{4046}{5} : -\frac{6069}{5}]$ など.

これが, **同値類** (同じものと見る) という考え方である.

射影平面 $\mathbb{P}^2$ の斉次座標とは

以上により, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の **“斉次” 座標**を

$$[\boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{Z}]$$

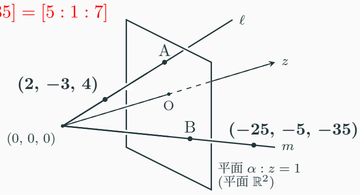
と定める (ただし, $[0:0:0]$ は考えない).

また, **同一視**により, 平面 α(平面 $\mathbb{R}^2$) の点も $\mathbb{P}^2$ の点とみれたので, 図の点 A, B の斉次座標は

A$[2:-3:4]$

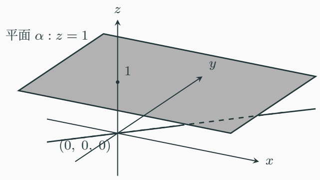
B$[-25:-5:-35]=[5:1:7]$

である.



無限遠点 ∞ とは

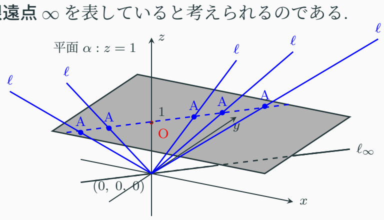
$\mathbb{R}^3$ における原点を通る直線のうちで, 平面 α と交わらないもの (xy 平面上の直線) があることに気付いただろうか. そのような直線 ($\mathbb{P}^2$ では点) は何を表すと考えればよいだろうか？



結論を言うと, $\mathbb{R}^2$ が $\mathbb{P}^2$ に含まれるとみたとき, そのような平面 α と平行な直線 ($\mathbb{P}^2$ の点) は, $\mathbb{R}^2$ の**無限の彼方にある点 (無限遠点)** を表すと考えるのである.

無限遠点 ∞ とは

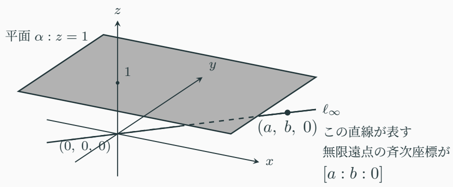
なぜなら, 今, 平面 α を平面 $\mathbb{R}^2$ とみて, α 上に 1 点 A と, A と ($\mathbb{R}^3$ の) 原点を通る直線 ℓ をとる. 次に点 A を $\mathbb{R}^2$ の原点 O からどんどん遠ざけていくことを考える (図では, A を点線に沿って左か右へ動かす). このとき, A が動くのと一緒に直線 ℓ も動いていくが, A が原点 O から限りなく遠くなると, 直線 ℓ は xy 平面上のある直線 ℓ_∞ に限りなく近づく. つまり, この直線 ℓ_∞ は無限の彼方にある点, **無限遠点** ∞ を表していると考えられるのである.



無限遠点 ∞ の斉次座標

図の, 平面 α に平行な直線 ℓ_∞ 上の点を $(a,\ b,\ 0)$ とすると, 直線 ℓ_∞ が表す無限遠点の斉次座標は $[\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} : \boldsymbol{0}]$ である.

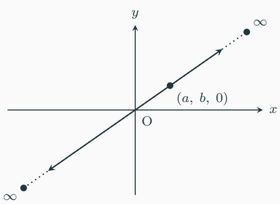
とくに, 無限遠点の斉次座標は Z 成分が 0 の $[\boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{0}]$ という形である (xy 平面上の直線の点は z 座標が 0 だから).



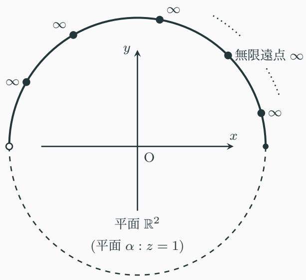
無限遠点 ∞ には方向がある

さらに, 無限遠点は平面上の “直線の傾き” の分だけ**無数に**存在する. つまり, 無限遠点には**方向がある**.

($\mathbb{R}^3$ の xy 平面に注目した) 下図の直線は, $[a:b:0]$ の無限遠点を表すが, 2 つの矢印はもちろん同じ直線であるから 2 つの矢印の方向の無限の彼方は同じである. すなわち, その先にある無限遠点 ∞ は同じ点 $[a:b:0]$ である！



射影平面 $\mathbb{P}^2$ のイメージ



平面 $\mathbb{R}^2$ があり, その平面 $\mathbb{R}^2$ の無限の彼方をぐるっと**半周ほど**, 無限遠点 ∞ たちが取り囲んでいる図を考えるとよい (O に関して対称な無限遠点は同じ点だから).

$\mathbb{P}^2$ の斉次座標 $[X:Y:Z]$ と $\mathbb{R}^2$ の座標 $(x,\ y)$ との関係

$\mathbb{P}^2$ 上で斉次座標が $[X:Y:Z]$(ただし, $Z \neq 0$) である点を考える. このとき, $\mathbb{R}^3$ の原点と点 $(X,\ Y,\ Z)$ を通る直線 ℓ がある. 直線 ℓ と平面 $\alpha : z = 1$ の交点を A とすると, A の ($\mathbb{R}^3$ での) 座標は

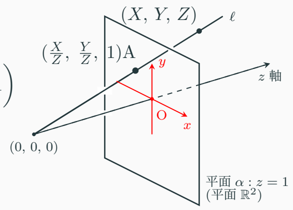
$$\mathrm{A}\left(\frac{X}{Z},\ \frac{Y}{Z},\ 1\right) \qquad (\text{A の } \mathbb{P}^2 \text{での座標は } [X:Y:Z])$$

である. 一方, はじめから平面 α を平面 $\mathbb{R}^2$ とみて A の座標を $(x,\ y)$ とすると, $\mathbb{R}^3$ では

$$\mathrm{A}(x,\ y,\ 1)$$

よって

$$(x,\ y,\ 1) = \left(\frac{X}{Z},\ \frac{Y}{Z},\ 1\right)$$



$\mathbb{P}^2$ の斉次座標 $[X:Y:Z]$ と $\mathbb{R}^2$ の座標 $(x,\ y)$ との関係

よって, x 座標, y 座標を比べれば

$$\boldsymbol{x = \frac{X}{Z},\quad y = \frac{Y}{Z}} \qquad \textbf{(ただし, } \boldsymbol{Z \neq 0}\textbf{)} \qquad \cdots(*)$$

が成立する. これが, $\mathbb{R}^2$ の座標と $\mathbb{P}^2$ の斉次座標

$$(x,\ y) \longleftrightarrow [X:Y:Z]$$

の関係であり, これから, 次の対応があることも分かる.

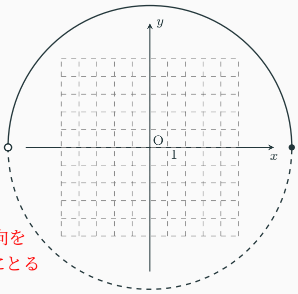
$\mathbb{R}^2$		$\mathbb{P}^2$
点 $\boldsymbol{(x,\ y)}$	$\longrightarrow$	点 $\boldsymbol{[x:y:1]}$
点 $\boldsymbol{\left(\frac{X}{Z},\ \frac{Y}{Z}\right)}$	$\longleftarrow$	点 $\boldsymbol{[X:Y:Z]}$

!注意! 関係 $(*)$ は無限遠点では成立しない.

演習問題 ①

次の射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の点 P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ について, 無限遠点でない場合は $\mathbb{R}^2$ での座標 $(x,\ y)$ を求め, 無限遠点である場合はその方向を表す直線を図示せよ. また, これら 4 点を図示せよ.

(1) $\mathrm{P}_1\,[4:4:-2]$
(2) $\mathrm{P}_2\,[-3:2:0]$
(3) $\mathrm{P}_3\,[-16:-12:-4]$
(4) $\mathrm{P}_4\,[0:-3:0]$



!注意! 無限遠点は, その方向を表す直線を描いて, その先にとる

演習問題 ① の解答 (ページ 1/2)

(1) $\mathrm{P}_1\,[4:4:-2]$ の $\mathbb{R}^2$ での座標は

$$\mathrm{P}_1 = \left(\frac{4}{-2},\ \frac{4}{-2}\right) = \boldsymbol{(-2,\ -2)}$$

(2) $\mathrm{P}_2\,[-3:2:0]$ は無限遠点であり, その方向を表すのは原点と点 $(-3,\ 2)$ を通る直線である.

(3) $\mathrm{P}_3\,[-16:-12:-4]$ の $\mathbb{R}^2$ での座標は

$$\mathrm{P}_3 = \left(\frac{-16}{-4},\ \frac{-12}{-4}\right) = \boldsymbol{(4,\ 3)}$$

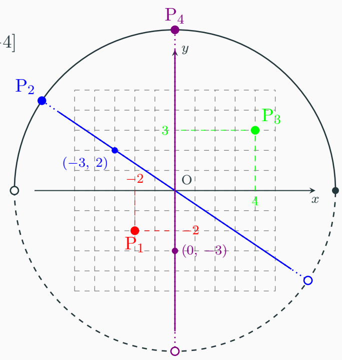
(4) $\mathrm{P}_4\,[0:-3:0]$ は無限遠点であり, その方向を表すのは原点と点 $(0,\ -3)$ を通る直線である.

!注意! 無限遠点の方向を表す直線とは, $\mathbb{R}^3$ におけるその無限遠点を表す (xy 平面上の) 直線のことである.

演習問題 ① の解答 (ページ 2/2)

(1) $\mathrm{P}_1\,[4:4:-2]$
(2) $\mathrm{P}_2\,[-3:2:0]$
(3) $\mathrm{P}_3\,[-16:-12:-4]$
(4) $\mathrm{P}_4\,[0:-3:0]$

図示すると, 右図.



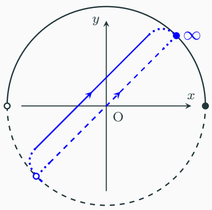
$\mathbb{P}^2$ 上の直線とは

射影平面 $\mathbb{P}^2$ というものは, 普通の平面 $\mathbb{R}^2$ に, 直線の傾きの分だけ無限遠点を (その周りに) 付け足した平面であるから, 次の (i)〜(iii) は当然成り立っていて欲しいことである.

(i) $\mathbb{P}^2$ 上の直線は, $\mathbb{R}^2$ 上の (1 つの) 直線を含んでいる.

(ii) $\mathbb{P}^2$ 上の直線は, 1 つの無限遠点 ∞ を通っている.
(なぜなら, 直線は無限の彼方まで伸びていて, 1 つの傾きにつき 1 つの ∞ が対応するから)

(iii) $\mathbb{P}^2$ 上の直線が点 $[p:q:r]$ を通るならば, 点 $[tp:tq:tr]$ も通る.
(なぜなら, これらはすべて同じ点だから)



$\mathbb{P}^2$ 上の直線の式

$\mathbb{P}^2$ 上の直線の式を求めるには, (i) より, 平面 $\mathbb{R}^2$ の一般の直線の式

$$\boldsymbol{ax+by+c=0} \qquad (\text{ただし, } a=b=0 \text{ でない})$$

に関係 $(*)$ $\boldsymbol{x=\dfrac{X}{Z},\ \ y=\dfrac{Y}{Z}}$ を用いればよいと考えられる.

すなわち, $(*)$ を代入して

$$a\cdot\frac{X}{Z}+b\cdot\frac{Y}{Z}+c=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{L: aX+bY+cZ=0}$$

よって, この L を $\mathbb{P}^2$ 上の直線の式と定めるのである.

(ここで L は, a, b の少なくとも一方が 0 でない場合しか考えていないことに注意)

$\mathbb{P}^2$ 上の直線の式

$L: aX+bY+cZ=0$ が (i)〜(iii) を満たすことの確認

(i) L は $ax+by+c=0$ から出発しているので, (i) を満たすことは明らか.

(ii) L は明らかに無限遠点 $[\boldsymbol{b:-a:0}]$ を通る. また, $ax+by+c=0$ がこの無限遠点の方向を表すことも分かる
(通る無限遠点がただ 1 つであることは, 後で確認する).

(iii) L が点 $[p:q:r]$ を通るとすると $ap+bq+cr=0$ が成立する. このとき, L の左辺に $[tp:tq:tr]$ (t は任意) を代入すれば

$$atp+btq+ctr=t(ap+bq+cr)=t\cdot 0=0$$

より, L は点 $[tp:tq:tr]$ を通ると分かる.

無限遠直線 $L_\infty : Z=0$

次に, 直線の式 $aX+bY+cZ=0$ において, $a=b=0$ の場合の,

$$Z=0 \quad \cdots ①$$

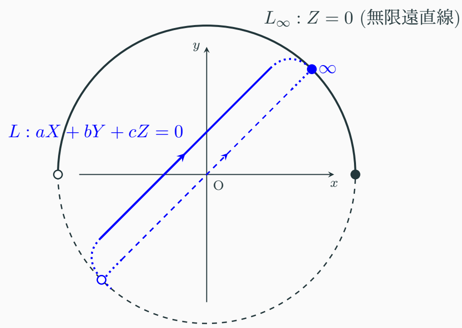
を考えると, ① を満たす点は $[p:q:0]$ という形の点のみ, すなわち無限遠点のみであり, 逆に, すべての無限遠点が ① を満たすことも分かる.

よって, 平面 $\mathbb{R}^2$ の周りを取り囲んでいた無限遠点たちの集合も 1 つの直線と考え,

$$\boldsymbol{L_\infty : Z=0}$$

と表し, **"無限遠直線"** と呼ぶ.

$\mathbb{P}^2$ 上の直線のイメージ図



まとめ ($\mathbb{P}^2$ 上の直線の式)

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の直線とは, 1 次式

$$L: aX+bY+cZ=0$$

を満たす点 $[X:Y:Z]$ の集まりであり, 別の述べ方をすると, 次の ① または ② のことである.

① ($a \fallingdotseq 0$ または $b \fallingdotseq 0$ のとき)
平面 $\mathbb{R}^2$ 上の直線に (その方向の) 無限遠点 $[b:-a:0]$ を付け加えたものとみれる

② ($a=b=0$ のとき)
無限遠点の集まりである, 無限遠直線 $L_\infty : Z=0$

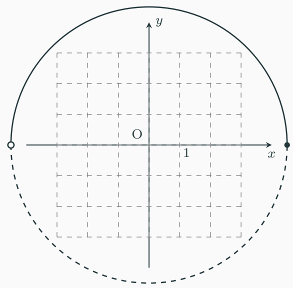
演習問題 ②

次の $\mathbb{P}^2$ の直線 L_i $(i=1,2,3)$ について, $\mathbb{R}^2$ での直線の方程式 ℓ_i を求め, $\mathbb{P}^2$ 上に L_i を図示せよ. また, L_1 と L_2 および L_2 と L_3 の交点 P, Q の斉次座標を求めよ (ヒント：関係 $(*)$ を用いる).

$L_1: 2X-Y-Z=0$
$L_2: X+2Y-3Z=0$
$L_3: X+2Y+2Z=0$

ℓ_1 :
ℓ_2 :
ℓ_3 :

P :
Q :



演習問題 ② の解答 (ページ 1/2)

関係 $x = \dfrac{X}{Z}$, $y = \dfrac{Y}{Z}$ を用いれば,

$$\ell_1 : 2x - y - 1 = 0 \iff y = 2x - 1$$

$$\ell_2 : x + 2y - 3 = 0 \iff y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\ell_3 : x + 2y + 2 = 0 \iff y = -\frac{1}{2}x - 1$$

また, ℓ_1 と ℓ_2 の交点は $(x,\ y) = (1,\ 1)$ であるから, L_1 と L_2 の交点 P の斉次座標は

$\mathrm{P}[1:1:1]$

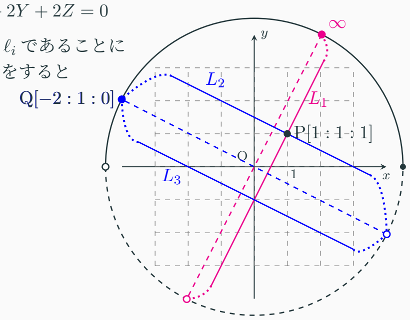
L_2 と L_3 は $\mathbb{R}^2$ で平行 ($\ell_2 \mathbin{/\!/} \ell_3$) であり, それらの無限遠点を表す方向は直線 $x + 2y = 0$ であるから, L_2 と L_3 の交点 Q の斉次座標は

$\mathrm{Q}[-2:1:0]$ (**無限遠点**)

演習問題 ② の解答 (ページ 2/2)

$L_1 : 2X - Y - Z = 0$
$L_2 : X + 2Y - 3Z = 0$
$L_3 : X + 2Y + 2Z = 0$

L_i は $\mathbb{R}^2$ では ℓ_i であることに注意して図示をすると



射影平面を考える理由

ここで,

“なぜ, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ というものを考えるのか”

という問いの答えとして, 次が成立するからである.

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の異なる 2 直線は常に 1 点で交わる.

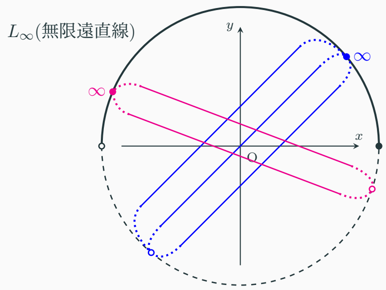
普通の平面 $\mathbb{R}^2$ では, 平行な 2 直線は交点を持たないので, これは射影平面特有の性質である.

$\mathbb{P}^2$ 上の直線は $\mathbb{R}^2$ の直線に無限遠点を 1 つ付け加えたものとみれた.

では, $\mathbb{P}^2$ 上の$\mathbb{R}^2$ において平行な 2 直線はどのように交わるだろうか?

$\mathbb{P}^2$ 上の直線の性質

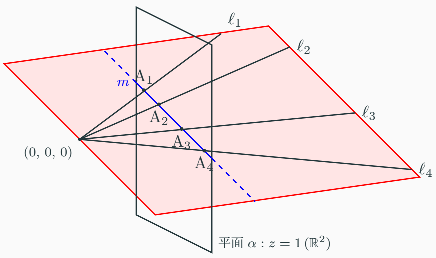
$\mathbb{R}^2$ で平行な直線は無限遠点 ∞ で交わる!



!注意! $\mathbb{P}^2$ 上の直線には, “平行” という概念はない.

$\mathbb{P}^2$ 上の 2 直線は常に 1 点で交わることの証明 (ページ 1/3)

[証明] 平面 $\alpha : z = 1$ 上に直線 m を 1 つとる.



$\mathbb{P}^2$ の直線の定め方より, 直線 m を含む $\mathbb{P}^2$ 上の直線 M がある.

$\mathbb{P}^2$ 上の 2 直線は常に 1 点で交わることの証明 (ページ 2/3)

ここで, 直線 m 上に 1 点 A_1 をとると, A_1 に対応する射影平面上の点は原点と A_1 を通る直線 ℓ_1 である ($\mathbb{P}^2$ の点とは, $\mathbb{R}^3$ の原点を通る直線であった). よって, $\mathbb{P}^2$ 上の直線 M は点 A_1 だけではなく, 直線 ℓ_1 すべてをも含まなければならない. 同様に, m 上に点 A_2, A_3, $\mathrm{A}_4 \cdots$ をとると, それらの点に対応する $\mathbb{P}^2$ 上の点である直線 ℓ_2, ℓ_3, $\ell_4 \cdots$ すべてを直線 M は含まなければならない.

したがって, 座標空間 $\mathbb{R}^3$ 上では,

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の直線 M とは,
平面 α 上の直線 m と原点を通る**平面** (!) である

と分かる (図では, M は赤で示した平面).

$\mathbb{P}^2$ 上の 2 直線は常に 1 点で交わることの証明 (ページ 3/3)

以上の考察から,

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の直線とは,
座標空間 $\mathbb{R}^3$ における原点を通る平面である

よって, $\mathbb{P}^2$ 上の 2 直線の交点とは, $\mathbb{R}^3$ における原点を通る 2 平面の交わりであり (必ず交わる), その交わりとは原点を通る直線である. $\mathbb{P}^2$ の点とは, $\mathbb{R}^3$ における原点を通る直線であるから, $\mathbb{P}^2$ 上の異なる 2 直線は常に 1 点で交わることが分かる. (終)

!注意! この証明から, $\mathbb{P}^2$ 上の直線でまだ確認していなかった

(ii) (L_∞ でない)$\mathbb{P}^2$ 上の直線が通る無限遠点はただ 1 つである

ことも分かる.

$\mathbb{P}^2$ 上の 2 点を通る直線はただ 1 つ

さらに, 次が成立することも分かる (これは平面 $\mathbb{R}^2$ で成立していたことなので, 当然成立していて欲しいことではある).

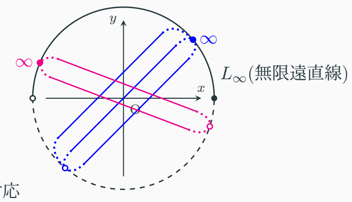
射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の異なる 2 点を通る直線はただ 1 つである.

実際, $\mathbb{P}^2$ 上の点とは, $\mathbb{R}^3$ における原点を通る直線であり, 原点を通る異なる 2 直線を含むような平面は, 原点を通りただ 1 つ存在する. したがって, $\mathbb{P}^2$ 上の異なる 2 点を通る直線はただ 1 つであることが分かる.

まとめ ($\mathbb{P}^2$ 上の直線の性質)

① 異なる 2 直線は常に 1 点で交わる.
(これは普通の平面 $\mathbb{R}^2$ ではつねに成り立つことではない)

② 異なる 2 点を通る直線はただ 1 つである.

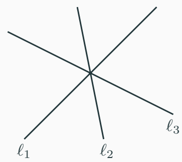


$\mathbb{P}^2$ と $\mathbb{R}^3$ の対応

$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{R}^3$
点 $[a : b : c]$	原点 O と点 $(a,\ b,\ c)$ を通る**直線**
直線 $aX + bY + cZ = 0$	**平面** $ax + by + cz = 0$

定義 (共点的, 共線的)

一般に, 3 直線が点を共有するとき, それら 3 直線は **共点的** であるといい, 3 点が同一直線上にあるとき, それら 3 点は**共線的**であるという.



$\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3$ は**共点的**である

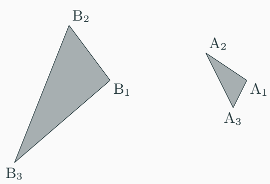
A, B, C は**共線的**である

デザルグの定理 ①

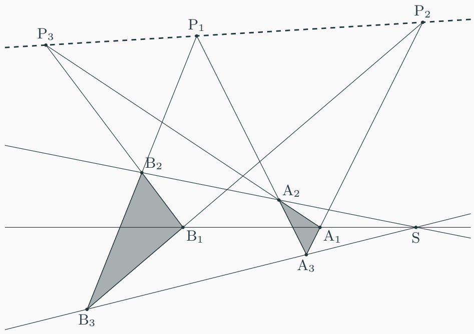
デザルグの定理 ①

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上に 2 つの三角形 $A_1A_2A_3$ と $B_1B_2B_3$ が与えられ, 3 直線 A_iB_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ は共点的である.
さらに, 2 直線 A_1A_2 と B_1B_2 が点 P_3 で交わり,2 直線 A_3A_1 と B_3B_1 が点 P_2 で交わり, 2 直線 A_2A_3 と B_2B_3 が点 P_1 で交わるとする.
このとき, 3 点 P_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ は共線的である.

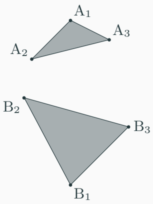
デザルグの定理 ① の図その 1 を書いてみよう



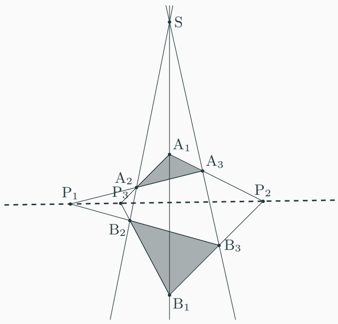
デザルグの定理 ① の図その 1



デザルグの定理 ① の図その 2 を書いてみよう



デザルグの定理 ① の図その 2



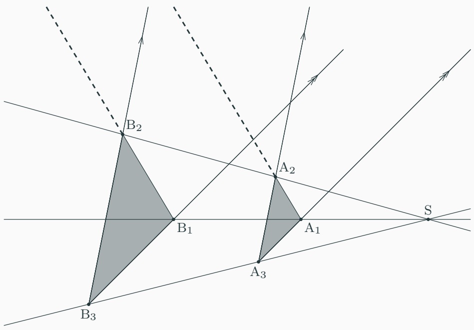
このような図も考えられるが, やはり 3 点 P_1, P_2, P_3 は共線的である.

デザルグの定理 ②

射影平面 $\mathbb{P}^2$ ではなく平面 $\mathbb{R}^2$ では, 次のような場合も考えられる.

> **デザルグの定理 ②**
>
> 平面 $\mathbb{R}^2$ 上に 2 つの三角形 $A_1A_2A_3$ と $B_1B_2B_3$ が与えられ,
> 3 直線 A_iB_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ は共点的である.
> さらに, $A_2A_3 \mathbin{/\!/} B_2B_3$ かつ $A_3A_1 \mathbin{/\!/} B_3B_1$ であるとする.
> このとき, $A_1A_2 \mathbin{/\!/} B_1B_2$ が成立する.

デザルグの定理 ② の図



デザルグの定理 ① と ② の違いとは？

デザルグの定理 ① と ② では,

「共線的である」と「平行である」

という, 一見全く逆のような主張が成立しているようにみえるが、これらに共通点はあるのだろうか？

↓

デザルグの定理 ② における 3 組の平行な 2 直線は, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上で考えれば,

無限遠直線 L_∞ の上で交わっている

とみれる！

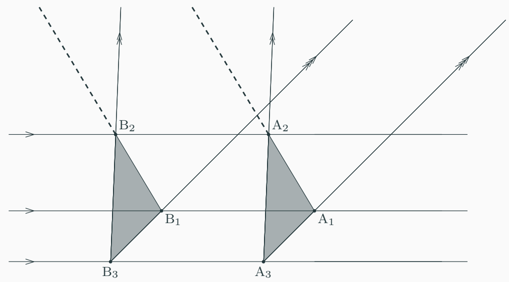
デザルグの定理 ③

さらに, 次のような場合も考えられる.

> **デザルグの定理 ③**
>
> 平面 $\mathbb{R}^2$ 上に 2 つの三角形 $A_1A_2A_3$ と $B_1B_2B_3$ が与えられ,
> $A_1B_1 \,/\!/\, A_2B_2 \,/\!/\, A_3B_3$ が成立している.
> さらに, $A_2A_3 \,/\!/\, B_2B_3$ かつ $A_3A_1 \,/\!/\, B_3B_1$ であるとする.
> このとき, $A_1A_2 \,/\!/\, B_1B_2$ が成立する.

“$A_1B_1 \,/\!/\, A_2B_2 \,/\!/\, A_3B_3$” は $\mathbb{P}^2$ 上では何を表しているだろうか？

デザルグの定理 ③ の図



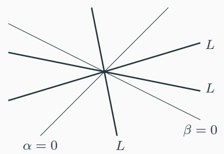
これらより, $\mathbb{P}^2$ 上では, 場合分けの煩雑さが無い, と分かる.

→『**デザルグの定理**』は $\mathbb{P}^2$ 上で考えるのが自然である！

補題 (直線束)

デザルグの定理 ① の証明で用いる次の事実を証明する.

> **補題 (直線束)**
>
> $\mathbb{P}^2$ 上の 2 直線 $\alpha = 0,\ \ \beta = 0$ に対し, その 2 直線の交点を通る 2 直線以外の任意の直線 L は, k をある 0 でない定数として,
>
> $$\boldsymbol{L : \alpha + k\,\beta = 0} \qquad (k \neq 0)$$
>
> と表せる (L が 2 直線の交点を通ることは明らか).



補題の証明 (ページ 1/2)

[証明] $\quad \alpha = a_1X + a_2Y + a_3Z$

$\qquad\qquad \beta = b_1X + b_2Y + b_3Z$

とする. L として, 2 直線上にない任意の点 $\mathrm{P} = [p : q : r]$ を通ることを示せばよい.

このとき, k として,

$$k = -\frac{a_1p + a_2q + a_3r}{b_1p + b_2q + b_3r}$$

ととれば,
(点 P は 2 直線 $\alpha = 0,\ \beta = 0$ 上にないので, 分子分母は 0 でない,
すなわち $k \neq 0$ として k が定まる)

補題の証明 (ページ 2/2)

$\quad L : \alpha + k\,\beta = 0$

すなわち,

$\quad L : a_1X + a_2Y + a_3Z + k(b_1X + b_2Y + b_3Z) = 0 \quad \cdots$ ①

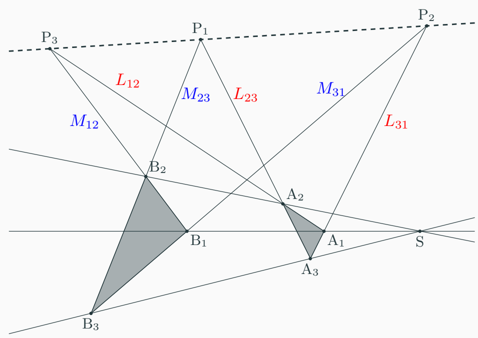
は点 P を通る直線である. 実際, ① の左辺に $\mathrm{P} = [p : q : r]$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
&(\text{①の左辺}) \\
&= a_1p + a_2q + a_3r + k(b_1p + b_2q + b_3r) \\
&= a_1p + a_2q + a_3r - \frac{a_1p + a_2q + a_3r}{b_1p + b_2q + b_3r}(b_1p + b_2q + b_3r) \\
&= a_1p + a_2q + a_3r - (a_1p + a_2q + a_3r) \\
&= 0
\end{aligned}$$

より, 直線 L は任意の点 P を通ると分かる. (終)

デザルグの定理 ① の証明の図

この図を見て**デザルグの定理** ① の証明を追いかけるとよい.



デザルグの定理 ① の証明 (ページ 1/5)

[証明] 6 点 A_i, B_i が S と一致するときは直ちに結論が導かれるので, A_i, B_i は S と異なるとする.

直線 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j$ を $L_{ij}=0$, 直線 $\mathrm{B}_i\mathrm{B}_j$ を $M_{ij}=0$ と表す. ただし, $L_{ij}=L_{ji}$, $M_{ij}=M_{ji}$ と約束する.

さて, A_1 は L_{12} と L_{31} の交点であるから, 交点 A_1 とその他の点 B_1 を通る直線は, 先ほどの**補題**より

$$L_{12}-k\,L_{31}=0 \qquad (k: 0 \text{ でない定数})$$

と表せる.

ここで, $k\fallingdotseq 0$ より, $L_{31}=0$ と $k\,L_{31}=0$ は同じ直線を表すので, はじめから, $k\,L_{31}$ を L_{31} として考えておけば, A_1 と B_1 を通る直線は

$$L_{12}-L_{31}=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

と表せる.

デザルグの定理 ① の証明 (ページ 2/5)

また, B_1 は M_{12} と M_{31} の交点であるから, 同様に考えれば, B_1 と A_1 を通る直線は

$$M_{12}-M_{31}=0 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

と表せる. ①, ② はどちらも直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ であるから, λ_1 をある 0 でない定数とすると

$$L_{12}-L_{31}=\lambda_1\,(M_{12}-M_{31})$$

が成立する. このようにして, L_{12}, L_{31}, M_{12}, M_{31} が定まり, さらに同様に考えれば,

$$L_{31}-L_{23}=\lambda_3\,(M_{31}-M_{23}) \qquad (\lambda_3\fallingdotseq 0)$$

を満たす L_{23}, M_{23} が定まる (上式の両辺は直線 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3$ を表す).

デザルグの定理 ① の証明 (ページ 3/5)

このとき,

$$L_{23}-L_{12}=(L_{23}\underline{-L_{31}})+(\underline{L_{31}}-L_{12})$$

と変形すれば, $L_{23}-L_{12}=0$ は 2 直線 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3$ と $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ の交点 S を通ることが分かるので, $L_{23}-L_{12}=0$ は 2 点 A_2 と S を通る直線, すなわち直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ である. 同様に考えれば, $M_{23}-M_{12}=0$ も直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ であるから, 結局

$$\begin{cases} L_{12}-L_{31}=\lambda_1\,(M_{12}-M_{31}) \\ L_{23}-L_{12}=\lambda_2\,(M_{23}-M_{12}) \quad \cdots\cdots (*) \qquad (\lambda_1\lambda_2\lambda_3\fallingdotseq 0) \\ L_{31}-L_{23}=\lambda_3\,(M_{31}-M_{23}) \end{cases}$$

が成立することが分かる.

デザルグの定理 ① の証明 (ページ 4/5)

次に, $(*)$ の辺々をそれぞれ加えると

$$0=\lambda_1\,(M_{12}-M_{31})+\lambda_2\,(M_{23}-M_{12})+\lambda_3\,(M_{31}-M_{23})$$

$$\therefore (\lambda_1-\lambda_2)M_{12}+(\lambda_2-\lambda_3)M_{23}+(\lambda_3-\lambda_1)M_{31}=0$$

ここで上の式において, M_{12}, M_{23} は B_2 を通るが, M_{31} は B_2 を通らないので, $\lambda_3-\lambda_1=0 \iff \lambda_1=\lambda_3$ が分かる. 同様に, 点 B_3 について考えれば $\lambda_1=\lambda_2$, すなわち

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\ (=\lambda \text{ とする})$$

であることが分かる.

$$\therefore \begin{cases} L_{12}-L_{31}=\lambda\,(M_{12}-M_{31}) \quad \cdots\cdots \text{③} \\ L_{23}-L_{12}=\lambda\,(M_{23}-M_{12}) \quad \cdots\cdots \text{④} \\ L_{31}-L_{23}=\lambda\,(M_{31}-M_{23}) \quad \cdots\cdots \text{⑤} \end{cases}$$

デザルグの定理 ① の証明 (ページ 5/5)

③ + ④ より

$$L_{23}-L_{31}=\lambda\,M_{23}-\lambda\,M_{31} \quad \therefore\ L_{23}-\lambda\,M_{23}=L_{31}-\lambda\,M_{31}$$

同様に, ③ + ⑤ より

$$L_{12}-\lambda\,M_{12}=L_{23}-\lambda\,M_{23}$$

が成立する. したがって

$$L_{12}-\lambda\,M_{12}=L_{23}-\lambda\,M_{23}=L_{31}-\lambda\,M_{31}$$

であるが, $L_{12}-\lambda\,M_{12}$, $L_{23}-\lambda\,M_{23}$, $L_{31}-\lambda\,M_{31}$ はそれぞれ点 P_3, P_1, P_2 を通る直線を表すので, 結局,

$$L_{12}-\lambda\,M_{12}=0 \ \ (\text{または},L_{23}-\lambda\,M_{23}=0,\ L_{31}-\lambda\,M_{31}=0)$$

は 3 点 P_1, P_2, P_3 を通る直線である. よって, 主張が示せた. (終)

まとめ (最後)

① 射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の直線とは, $aX+bY+cZ=0$ という形をしていて, $\mathbb{R}^2$ の直線に無限遠点 ∞ を 1 つ付け加えたものとみれる (または無限遠点だけからなる直線 $L_\infty: Z=0$).

② 射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の 2 直線は常に 1 点で交わる. また, 2 点を通る直線もただ 1 つである.

③ 『デザルグの定理』は, $\mathbb{P}^2$ 上で考えれば, 場合分けの煩雑さが無い. つまり, $\mathbb{P}^2$ 上で真価を発揮する.

④ 『デザルグの定理』を $\mathbb{P}^2$ 上の直線を用いて代数的に証明した.