2023 年度　第 14 回数学科リレー講座
Pascal 生誕 400 年記念 射影幾何入門
6 日目前半 (双対平面と双対定理)

佐藤 慧

2023 年 8 月 23 日

導入

本日前半のテーマは「双対」

双対とは · · ·
　互いに対になっている 2 つの対象の間の関係である。
　2 つの対象がある意味で互いに「裏返し」の関係にあるというようなニュアンスがある。　(Wikipedia より)

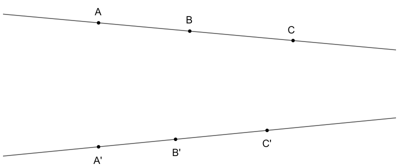
数学ではこの「裏返し」の関係性が非常に美しいことが多々ある。
少し具体的に例を見てみよう！

導入

次の命題を考えよう。

命題その 1

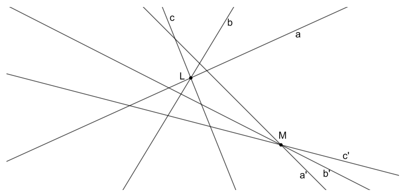
2 つの直線 $\ell,\ m$ があり、ℓ 上に 3 点 A, B, C、m 上に 3 点 A$'$, B$'$, C$'$ がある。このとき、「A と B$'$ を通る直線」と「B と A$'$ を通る直線」の交点を P、「B と C$'$ を通る直線」と「C と B$'$ を通る直線」の交点を Q、「C と A$'$ を通る直線」と「A と C$'$ を通る直線」の交点を R とすると、3 点 P, Q, R は一直線で結ばれる。



導入

命題その 2

2 つの点 L, M があり、L を通る 3 直線 $a,\ b,\ c$、M を通る 3 直線 $a',\ b',\ c'$ がある。このとき、「a と b' が交わる点」と「b と a' が交わる点」を結ぶ直線を p、「b と c' が交わる点」と「c と b' が交わる点」を結ぶ直線を q、「c と a' が交わる点」と「a と c' が交わる点」を結ぶ直線を r とすると、3 直線 $p,\ q,\ r$ は一点で交わる。

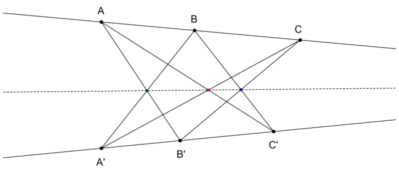


導入

次の命題を考えよう。

命題その 1

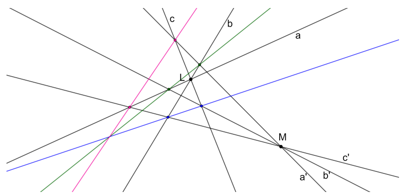
2 つの直線 $\ell,\ m$ があり、ℓ 上に 3 点 A, B, C、m 上に 3 点 A$'$, B$'$, C$'$ がある。このとき、「A と B$'$ を通る直線」と「B と A$'$ を通る直線」の交点を P、「B と C$'$ を通る直線」と「C と B$'$ を通る直線」の交点を Q、「C と A$'$ を通る直線」と「A と C$'$ を通る直線」の交点を R とすると、3 点 P, Q, R は一直線で結ばれる。



導入

命題その 2

2 つの点 L, M があり、L を通る 3 直線 $a,\ b,\ c$、M を通る 3 直線 $a',\ b',\ c'$ がある。このとき、「a と b' が交わる点」と「b と a' が交わる点」を結ぶ直線を p、「b と c' が交わる点」と「c と b' が交わる点」を結ぶ直線を q、「c と a' が交わる点」と「a と c' が交わる点」を結ぶ直線を r とすると、3 直線 $p,\ q,\ r$ は一点で交わる。



導入

この 2 つの命題を並べて比較をしてみよう。

命題その 1

2 つの直線 ℓ, m があり、ℓ 上に 3 点 A, B, C、m 上に 3 点 A′, B′, C′ がある。このとき、「A と B′ を通る直線」と「B と A′ を通る直線」の交点を P、「B と C′ を通る直線」と「C と B′ を通る直線」の交点を Q、「C と A′ を通る直線」と「A と C′ を通る直線」の交点を R とすると、3 点 P, Q, R は一直線で結ばれる。

命題その 2

2 つの点 L, M があり、L を通る 3 直線 a, b, c、M を通る 3 直線 a', b', c' がある。このとき、「a と b' が交わる点」と「b と a' が交わる点」を結ぶ直線を p、「b と c' が交わる点」と「c と b' が交わる点」を結ぶ直線を q、「c と a' が交わる点」と「a と c' が交わる点」を結ぶ直線を r とすると、3 直線 p, q, r は一点で交わる。

導入

この 2 つの命題を並べて比較をしてみよう。

命題その 1

2 つの直線 ℓ, m があり、ℓ 上に 3 点 A, B, C、m 上に 3 点 A′, B′, C′ がある。このとき、「A と B′ を通る直線」と「B と A′ を通る直線」の交点を P、「B と C′ を通る直線」と「C と B′ を通る直線」の交点を Q、「C と A′ を通る直線」と「A と C′ を通る直線」の交点を R とすると、3 点 P, Q, R は一直線で結ばれる。

命題その 2

2 つの点 L, M があり、L を通る 3 直線 a, b, c、M を通る 3 直線 a', b', c' がある。このとき、「a と b' が交わる点」と「b と a' が交わる点」を結ぶ直線を p、「b と c' が交わる点」と「c と b' が交わる点」を結ぶ直線を q、「c と a' が交わる点」と「a と c' が交わる点」を結ぶ直線を r とすると、3 直線 p, q, r は一点で交わる。

導入

この 2 つの命題は「点」と「直線」、「交わる」と「結ぶ (通る)」を互いに入れ替えた命題になっている。

このようなとき、2 つの命題は 双対 であるといわれる。

数学や物理ではこの双対の概念が非常に多くのところで見られる。
例)
論理学における
　「かつ (∧)」と「または (∨)」、「すべての (∀)」と「ある (∃)」など
最適化における「最小問題」と「最大問題」
電磁気における「電流」と「電圧」、「電場」と「磁場」など

射影幾何における双対

それでは射影幾何における双対とはなんだろうか。
実は、先ほど触れたように射影幾何では点と直線に関する命題は双対の関係がある。それを確認していこう。

定義：双対平面

ある射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上における直線 $aX + bY + cZ = 0$ を別の射影平面 $\mathbb{P}^{2*}$ 上の点 $[a : b : c]$ を対応させたとき、この射影平面 $\mathbb{P}^{2*}$ をもとの射影平面 $\mathbb{P}^2$ の双対平面と定義する。

簡単に言うと $\cdots$
　射影平面上の「直線」を別の射影平面 (双対平面) の「点」に対応させることにした。
　→ では双対平面上の「直線」はどうするべきか？

射影幾何における双対

双対平面上の直線

双対平面 $\mathbb{P}^{2*}$ 上の直線 $pX + qY + rZ = 0$ はもとの射影平面 P^2 上では無数の直線となるが、どの直線も定点 $[p : q : r]$ を通ることを示せ。

証明
双対平面の直線 $pX + qY + rZ = 0$ 上の任意の点を $[x_0 : y_0 : z_0]$ とする。
つまりこのとき、$px_0 + qy_0 + rz_0 = 0 \quad \cdots$① を満たす。

また、双対平面上の $[x_0 : y_0 : z_0]$ と対応するもとの射影平面の直線は

$$x_0X + y_0Y + z_0Z = 0 \quad \cdots ②$$

である。

射影幾何における双対

(証明続き)
いま、① により ② を満たす $[X : Y : Z]$ の組は

$$[X : Y : Z] = [p : q : r]$$

を持つ。つまり、② は点 $[p : q : r]$ を通る。
任意の $[x_0 : y_0 : z_0]$ に対して、P^2 上の点 $[p : q : r]$ を通るため P^{2*} 上の直線 $pX + qY + rZ = 0$ はもとの射影平面 P^2 上では無数の直線となり、どの直線も定点 $[p : q : r]$ を通る。 ■

上記により、双対平面上の直線をもとの射影平面の定点と対応させることにする。

射影幾何における双対

射影平面 $\mathbb{P}^2$ と双対平面 $\mathbb{P}^{2*}$ の対応関係をまとめると

$$\mathbb{P}^2 \text{上の直線 } aX+bY+cZ=0 \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}^{2*} \text{上の点 } [a:b:c]$$
$$\mathbb{P}^2 \text{上の点 } [a:b:c] \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}^{2*} \text{上の直線 } aX+bY+cZ=0$$

このように対応関係を持たせると

「ある射影平面の双対平面の双対平面はもとの射影平面にもどってくる」
(つまり、$(\mathbb{P}^{2*})^*$ は $\mathbb{P}^2$ とみなせる)

といえる。

双対命題

さて、この双対平面の何が嬉しいかというと

ある射影平面上の点と直線に関する命題に対して、「点」と「直線」を入れ替えた命題 (双対命題という) は双対平面上のもとの命題と同じとみなすことができる。

つまり、ある命題が成り立つならばその双対命題は双対平面上でもとの命題と一致する (= 成り立つ) ので、双対命題も成り立つのである。

これにより

- ある定理から双対命題により新たな定理が得られる
- 双対命題を証明せずに認めることができる

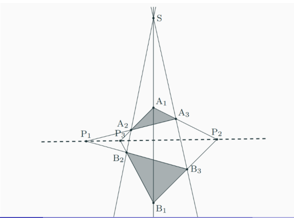
と、多大な恩恵を受けとることができる！

デザルグの双対命題

さて、双対命題の具体例を確認してみよう。

デザルグの定理 (再掲)

$\mathbb{P}^2$ 上に 2 つの三角形 $A_1A_2A_3$ と $B_1B_2B_3$ が与えられ、3 直線 A_iB_i は共点的であるとする。さらに、2 直線 A_2A_3 と B_2B_3 の交点を P_1、2 直線 A_3A_1 と B_3B_1 の交点を P_2、2 直線 A_1A_2 と B_1B_2 の交点を P_3 とする。このとき、P_i は共線的である。(ただし、$i=1, 2, 3$)



デザルグの双対命題

双対命題を考える。(以下 $i=1, 2, 3$、点を大文字、直線を小文字でおく)

デザルグの定理	双対命題
仮定： 共線的でない 3 点 A_1, A_2, A_3 共線的でない 3 点 B_1, B_2, B_3 $A_i \neq B_i$ 共点条件 点 S、異なる 3 直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 $S \in \ell_i$, $A_i \in \ell_i$, $B_i \in \ell_i$ 6 直線 u_i, v_i： $A_2 \in u_1, A_3 \in u_1, B_2 \in v_1, B_3 \in v_1$ $A_3 \in u_2, A_1 \in u_2, B_3 \in v_2, B_1 \in v_2$ $A_1 \in u_3, A_2 \in u_3, B_1 \in v_3, B_2 \in v_3$ 点 P_i：　$P_i \in u_i, P_i \in v_i$	仮定：

デザルグの双対命題

双対命題を考える。(以下 $i=1, 2, 3$、点を大文字、直線を小文字でおく)

デザルグの定理	双対命題
仮定： 共線的でない 3 点 A_1, A_2, A_3 共線的でない 3 点 B_1, B_2, B_3 $A_i \neq B_i$ 共点条件 点 S、異なる 3 直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 $S \in \ell_i$, $A_i \in \ell_i$, $B_i \in \ell_i$ 6 直線 u_i, v_i： $A_2 \in u_1, A_3 \in u_1, B_2 \in v_1, B_3 \in v_1$ $A_3 \in u_2, A_1 \in u_2, B_3 \in v_2, B_1 \in v_2$ $A_1 \in u_3, A_2 \in u_3, B_1 \in v_3, B_2 \in v_3$ 点 P_i：　$P_i \in u_i, P_i \in v_i$	仮定： 共点的でない 3 直線 a_1, a_2, a_3 共点的でない 3 直線 b_1, b_2, b_3

デザルグの双対命題

双対命題を考える。(以下 $i=1, 2, 3$、点を大文字、直線を小文字でおく)

デザルグの定理	双対命題
仮定： 共線的でない 3 点 A_1, A_2, A_3 共線的でない 3 点 B_1, B_2, B_3 $A_i \neq B_i$ 共点条件 点 S、異なる 3 直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 $S \in \ell_i$, $A_i \in \ell_i$, $B_i \in \ell_i$ 6 直線 u_i, v_i： $A_2 \in u_1, A_3 \in u_1, B_2 \in v_1, B_3 \in v_1$ $A_3 \in u_2, A_1 \in u_2, B_3 \in v_2, B_1 \in v_2$ $A_1 \in u_3, A_2 \in u_3, B_1 \in v_3, B_2 \in v_3$ 点 P_i：　$P_i \in u_i, P_i \in v_i$	仮定： 共点的でない 3 直線 a_1, a_2, a_3 共点的でない 3 直線 b_1, b_2, b_3 $a_i \neq b_i$ 共線条件 直線 s、異なる 3 点 L_1, L_2, L_3 $s \ni L_i$, $a_i \ni L_i$, $b \ni L_i$ 6 点　U_i, V_i $a_2 \ni U_1, a_3 \ni U_1, b_2 \ni V_1, b_3 \ni V_1$ $a_3 \ni U_2, a_1 \ni U_2, b_3 \ni V_2, b_1 \ni V_2$ $a_1 \ni U_3, a_2 \ni U_3, b_1 \ni V_3, b_2 \ni V_3$ 直線 p_i：　$p_i \ni U_i, p_i \ni V_i$

デザルグの双対命題

デザルグの定理	双対命題
結論： 直線 k が存在して、 $\mathsf{P}_i \in k$ (共線的)	結論： 点 K が存在して、 $p_i \ni \mathsf{K}$ (共点的)

デザルグの定理の双対命題

$\mathbb{P}^2$ 上に、2 組の共点的でない 3 直線 $a_1,\ a_2,\ a_3$ と $b_1,\ b_2,\ b_3$ が与えられ、$a_i \neq b_i$ で a_i と b_i の交点を L_i としたときに、L_i は互いに一致せず共線的であるとする。さらに、
(1) 2 直線 a_2 と a_3 の交点を U_1、2 直線 b_2 と b_3 の交点を V_1
(2) 2 直線 a_3 と a_1 の交点を U_2、2 直線 b_3 と b_1 の交点を V_2
(3) 2 直線 a_1 と a_2 の交点を U_3、2 直線 b_1 と b_2 の交点を V_3
とする。このとき、3 直線 $p_i = \mathsf{U}_i\mathsf{V}_i$ は共点的である。

デザルグの定理の双対命題

双対命題は以下のような流れで導くことができる。

双対命題の証明の流れ

デザルグの定理の仮定 $\longleftarrow$ デザルグの定理の双対命題の仮定

$\downarrow$ デザルグの定理の証明

デザルグの定理の結論 $\longrightarrow$ デザルグの定理の双対命題の仮定

双対平面上の曲線

さて、パスカルの定理は既約な二次曲線上での定理であったので、既約な二次曲線の双対平面上でのふるまいを見てみよう。

定義：双対曲線

ある射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上に直線でない曲線 Γ が与えられたとする。Γ 上の各点での接線全体は、双対平面上において曲線を表す。この双対平面上の曲線のことを双対曲線とよび、Γ^* と表す。

なぜに接線 $\cdots$ ？と思うかもしれないが $\cdots$
曲線も極めて狭い範囲でみれば直線とみなすことができるので、接線が登場するのは数学的には突拍子もないことではないのである。

双対平面上の曲線 証明 (1/4)

それでは既約な二次曲線について次の定理を紹介しよう。

既約な二次曲線の双対曲線

既約な二次曲線 Γ の双対曲線 Γ^* は、既約な二次曲線である。

証明
射影平面の既約な二次曲線は
$ax^2 + 2hxyby^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ で与えられているとすると
その斉次形は $x = \dfrac{X}{Z},\ y = \dfrac{Y}{Z}$ とおいて
分母を払った

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2gXZ + 2fYZ + cZ^2 = 0$$

である。点 $[x_0 : y_0 : z_0]$ が Γ 上にあるとすれば

$$ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2 + 2gx_0z_0 + 2fy_0z_0 + cz_0^2 = 0 \tag{1}$$

が成り立つ。

証明続き (2/4)

この点での Γ の接線の方程式は、極線の方程式 (4 日目に登場) を
斉次化したものと等しく

$$ax_0X + hx_0Y + hy_0X + by_0Y + gx_0Z + gz_0X + fy_0Z + fz_0Y + cz_0 = 0$$

つまり、

$$(ax_0 + hy_0 + gz_0)X + (hx_0 + by_0 + fz_0)Y + (gx_0 + fy_0 + cz_0)Z = 0$$

なので、

$$\begin{aligned} U &= ax_0 + hy_0 + gz_0 & (2)\\ V &= hx_0 + by_0 + fz_0 & (3)\\ W &= gx_0 + fy_0 + cz_0 & (4) \end{aligned}$$

とおくと、接線は双対平面上の点 $[U : V : W]$ に写される。
また、(2), (3), (4) を $x_0,\ y_0,\ z_0$ を未知数とした連立 1 次方程式とみなすことができるので

証明続き (3/4)

また、(2), (3), (4) を $x_0,\ y_0,\ z_0$ を未知数とした連立 1 次方程式とみなすことができ、Γ が既約な二次曲線 ($a,\ b, c,\ \cdots$ の設定) であることから、この解は一意に定まる。
(本当は証明したいことだが、時間の都合で断念 $\cdots$)
したがって、

$$\begin{aligned} x_0 &= p_1U + p_2V + p_3W\\ y_0 &= q_1U + q_2V + q_3W\\ z_0 &= r_1U + r_2V + r_3W \end{aligned}$$

と書ける。これを (1) 式に代入することで $U,\ V,\ W$ に関する斉次 2 次式が得られる。これが双対曲線 Γ^* であり、斉次 2 次式 $= 0$ なので Γ^* は 2 次曲線であることがわかる。

証明続き (4/4)

最後に既約であるかどうかを考える。

いま、Γ^* が既約でない、つまり 2 直線の和集合で表すことができると仮定すると Γ 上での接線は同一の定点を通ることになる。しかし、2 次曲線はある定点から 3 本以上の接線を引くことができないので矛盾。

以上から、既約な二次曲線 Γ の双対曲線 Γ^* は、既約な二次曲線である。 ■

双対のまとめ

双対定理

射影平面上においていくつかの「点」といくつかの「直線」といくつかの既約な二次曲線に関する命題について、その「点」と「直線」を入れ替えた命題は双対平面上でもとの命題として成り立つ。
つまり、命題が真ならばその双対命題も真である。

これは当時 (1800 年代初頭) は大発見であり、この事実が大きく射影幾何学を大きく発展させたともいえる。

Jean-Victor Poncelet

Joseph Diez Gergonne

双対のまとめ

実際、パスカルの定理は 1639 年頃パスカルによって証明されたと言われているが、双対が意識され始めたことで 1810 年ブリアンションによってパスカルの定理の双対であるブリアンションの定理が証明されたのである。

“「点」と「直線」を入れ替えた ” という裏返しの関係がこんなにも美しいという事実を知っていただければ幸いである。
先にも述べた通りにこの双対はさまざまな分野で確認されており、双対性により多くの研究の発展が伴ってきた。ぜひ、諸君らにも双対がどこかに隠れていないか探してみてほしい。

後半へつづく

後半はいよいよ大詰め
今までの射影幾何の知識総動員でパスカルの定理の証明へと向かいます！

ご清聴ありがとうございました！

参考文献

・平面図形の幾何学　(難波　誠　著、現代数学社、2008)
・楽しもう射影平面 (太田　春外　著、日本評論社、2016)
・射影平面の幾何学 (郡　敏昭　著、遊星社、1988)

第 14 回 数学科リレー講座
パスカル生誕 400 年記念
6 日目後半

平山裕之

海城中学高等学校

2023/08/23

今までの内容確認

- パスカルの定理
- ブリアンションの定理
- 射影平面
- 双対定理

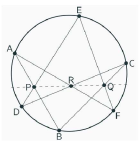
今までの内容確認

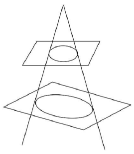
パスカルの定理

円 (円錐曲線) に内接する六辺形の 3 組の対辺の交点は一直線上にある

円において，メネラウスと方べきの定理を用いて証明した。(3 日目)

射影することで，円から円錐曲線の定理に拡張した (4 日目)





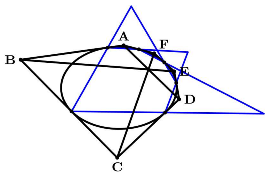
射影によって，長さ・角の大きさは変わる

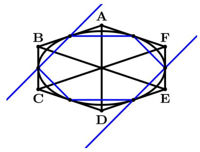
今までの内容確認

ブリアンションの定理

円錐曲線に外接する六辺形 ABCDEF の 3 組の対角線 AD,BE,CF は 1 点で交わる

パスカルの定理を用いて証明した。





対辺が平行で交点がない場合の証明はしていない

今までの内容確認

射影平面

- 射影平面上で，2 直線は交点をもつ
- 斉次座標 $[\mathbf{X}:\mathbf{Y}:\mathbf{Z}]$，直線 $a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}+c\mathbf{Z}=0$

双対定理

射影平面上で，点と直線と円錐曲線に関する命題があるとき，
点と直線を入れ替えた命題は双対平面上でも成り立つ

6 日目後半の目標

パスカルの定理の証明

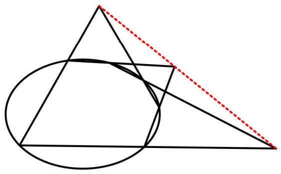
射影平面において，パスカルの定理を代数的に証明する
対辺が平行，交わるの区別をすることなく示す

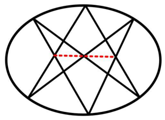
ブリアンションの定理の証明

ブリアンションの定理がパスカルの定理の双対定理であることを確かめ，
実質的な証明はしない

パスカルの定理

パスカルの定理
円錐曲線に内接する六辺形の 3 組の対辺の交点は一直線上にある

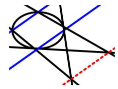




パスカルの定理

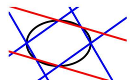
1 組の対辺が平行のとき，他の 2 組の対辺の交点を結ぶ直線も平行

他の 2 組の対辺の交点を結ぶ直線は，
平行な対辺の交点 (無限遠点) を通る



2 組の対辺が平行のとき，他の 1 組の対辺も平行

平行な 2 組の対辺の交点 (無限遠点) を結ぶ直線は
無限遠直線で，他の 1 組の対辺の交点が無限遠点



射影平面では平行の場合を区別しない

パスカルの定理の証明の準備

補題
平面上に 5 点 $\mathbf{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5}$ があり，これらのどの 3 点も直線上にないとする。このとき，これら 5 点をすべて通る既約二次曲線が唯一存在する。

x, y についての 2 次式
$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
をみたす点 (x, y) の集合が表す図形を考える

2 次式が 1 次式の積に因数分解できるとき可約，できないとき既約という

可約のとき，図形は 2 つの直線 (重なる場合も含む)
既約のとき，図形は円錐曲線 (楕円・放物線・双曲線)

補題の略証

$\mathbf{P_1}(p_{11}, p_{12}), \mathbf{P_2}(p_{21}, p_{22}), \mathbf{P_3}(p_{31}, p_{32}), \mathbf{P_4}(p_{41}, p_{42}), \mathbf{P_5}(p_{51}, p_{52})$
とおく

求める方程式を $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ とすると，
どの 3 点も直線上にないので，2 次式は既約であり，

$$ap_{11}^2 + 2hp_{11}p_{12} + bp_{12}^2 + 2gp_{11} + 2fp_{12} + c = 0$$
$$ap_{21}^2 + 2hp_{21}p_{22} + bp_{22}^2 + 2gp_{21} + 2fp_{22} + c = 0$$
$$ap_{31}^2 + 2hp_{31}p_{32} + bp_{32}^2 + 2gp_{31} + 2fp_{32} + c = 0$$
$$ap_{41}^2 + 2hp_{41}p_{42} + bp_{42}^2 + 2gp_{41} + 2fp_{42} + c = 0$$
$$ap_{51}^2 + 2hp_{51}p_{52} + bp_{52}^2 + 2gp_{51} + 2fp_{52} + c = 0$$

a, h, b, g, f, c に関する連立方程式とみれば，
定数項がすべて 0，未知数が 6 個で，方程式が 5 個なので，
いずれかは 0 でない解が存在する $\Longleftarrow$ 線形代数の話

パスカルの定理の証明

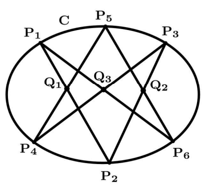
6 点 $\mathbf{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6}$ が
既約二次曲線 $\mathbf{C}$ 上にあるとする

$\mathbf{C}$ が既約なので，
どの 3 点も一直線上にない

直線 $\mathbf{P_1P_2}$ と $\mathbf{P_4P_5}$ の交点を $\mathbf{Q_1}$
直線 $\mathbf{P_2P_3}$ と $\mathbf{P_5P_6}$ の交点を $\mathbf{Q_2}$
直線 $\mathbf{P_3P_4}$ と $\mathbf{P_6P_1}$ の交点を $\mathbf{Q_3}$
とおく

交点は無限遠点でもよい。

3 点 $\mathbf{Q_1, Q_2, Q_3}$ が
一直線上にあることを示す



パスカルの定理の証明

直線 $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j$ の方程式を $\mathbf{L}_{ij} = 0$ とおく

直線なので $\mathbf{L}_{ij}$ は 1 次式で
$\mathbf{L}_{ij} = ax + by + c$
射影平面での直線と考えれば
$\mathbf{L}_{ij} = a\mathbf{X} + b\mathbf{Y} + c\mathbf{Z}$ と表される

直線 $\mathbf{L}_{ij} = 0$ と点 $\mathbf{P_0}(x_0, y_0)$ に対して，
x_0, y_0 を $\mathbf{L}_{ij}$ に代入した値を $\mathbf{L}_{ij}(\mathbf{P_0})$ とかくとき，
$\mathbf{L}_{ij}(\mathbf{P_0}) = 0$ と点 $\mathbf{P_0}$ が直線上にあることは同値

たとえば，
$\mathbf{P_1, P_2}$ は直線 $\mathbf{L_{12}} = 0$ 上の点だから，
$\mathbf{L_{12}(P_1)} = 0,\ \mathbf{L_{12}(P_2)} = 0$

パスカルの定理の証明

ここで，k を定数として，
方程式　$\mathbf{D : L_{12}L_{34} - kL_{23}L_{14} = 0}$ $\cdots$①　を考える

$\mathbf{L}_{ij}$ が 1 次式なので，$\mathbf{D}$ は 2 次式

$\mathbf{L_{12}, L_{14}}$ は $\mathbf{P_1}$ を通り，
$\mathbf{L_{12}(P_1) = 0,\ L_{14}(P_1) = 0}$ だから
$\mathbf{L_{12}(P_1)L_{34}(P_1) - kL_{23}(P_1)L_{14}(P_1) = 0}$

したがって，$\mathbf{P_1}$ は方程式 ① をみたす点であり，
曲線 $\mathbf{D}$ は $\mathbf{P_1}$ を通る

同様にして，$\mathbf{D}$ は $\mathbf{P_2, P_3, P_4}$ も通る

この議論で，
$\mathbf{D}$ が $\mathbf{P_1, P_2, P_3, P_4}$ を通ることに，k の値はかかわっていない

パスカルの定理の証明

そこで，$\mathbf{D}$ が $\mathbf{P_5}$ も通るように
$\mathbf{L_{12}(P_5)L_{34}(P_5) - kL_{23}(P_5)L_{14}(P_5) = 0}$
をみたすような k の値を定めれば，
$\mathbf{D}$ は 5 点 $\mathbf{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5}$ を通る

補題より，5 点を通る既約二次曲線は唯一だから，
方程式　$\mathbf{L_{12}L_{34} - kL_{23}L_{14} = 0}$ $\cdots$①　は曲線 $\mathbf{C}$

同様にして，k' を定数として，
方程式　$\mathbf{L_{45}L_{16} - k'L_{56}L_{14} = 0}$ $\cdots$②　は曲線 $\mathbf{C}$

①, ② は共に曲線 $\mathbf{C}$ だから，2 つの二次式は定数しか違わない

そこで，$\mathbf{L_{45}}$ と $\mathbf{L_{56}}$ にあらかじめ，その定数をかけておけば，
$\mathbf{L_{12}L_{34} - kL_{23}L_{14} = L_{45}L_{16} - k'L_{56}L_{14}}$ と仮定してよい

移項して
$\mathbf{L_{12}L_{34} - L_{45}L_{16} = L_{14}(kL_{23} - k'L_{56})}$ $\cdots$③

パスカルの定理の証明

$\mathbf{L_{12}L_{34} - L_{45}L_{16} = L_{14}(kL_{23} - k'L_{56})}$ $\cdots$③

二次曲線　$\mathbf{E : L_{12}L_{34} - L_{45}L_{16} = 0}$　を考える

$\mathbf{Q_1}$ は $\mathbf{L_{12} = 0, L_{45} = 0}$ の交点だから，
$\mathbf{L_{12}(Q_1) = 0,\ L_{45}(Q_1) = 0}$
$\mathbf{L_{12}(Q_1)L_{34}(Q_1) - L_{45}(Q_1)L_{16}(Q_1) = 0}$ より，
$\mathbf{E}$ は $\mathbf{Q_1}$ を通る

同様に，$\mathbf{Q_3}$ は $\mathbf{L_{34} = 0, L_{16} = 0}$ の交点だから，
$\mathbf{E}$ は $\mathbf{Q_3}$ を通る

一方，③ より，$\mathbf{E}$ は $\mathbf{L_{14}(kL_{23} - k'L_{56}) = 0}$ でもあるので，
$\mathbf{E}$ は可約で，2 直線 $\mathbf{L_{14} = 0,\ kL_{23} - k'L_{56} = 0}$ を表す

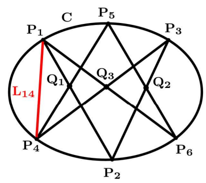
パスカルの定理の証明

$\mathbf{E : L_{14}(kL_{23} - k'L_{56}) = 0}$ において，

$\mathbf{E}$ は $\mathbf{Q_1, Q_3}$ を通ったが，
直線 $\mathbf{L_{14} = 0}$ は
$\mathbf{Q_1, Q_3}$ を通らないので，

直線 $\mathbf{kL_{23} - k'L_{56} = 0}$ が，
$\mathbf{Q_1, Q_3}$ を通る

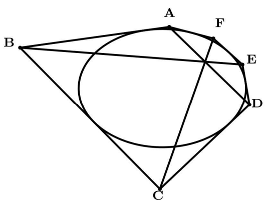
$\mathbf{Q_2}$ は $\mathbf{L_{23} = 0, L_{56} = 0}$ の交点だから，
$\mathbf{L_{23}(Q_2) = 0,\ L_{56}(Q_2) = 0}$
$\mathbf{kL_{23}(Q_2) - k'L_{56}(Q_2) = 0}$ より，
直線 $\mathbf{kL_{23} - k'L_{56} = 0}$ は $\mathbf{Q_2}$ を通る



したがって，
3 点 $\mathbf{Q_1, Q_2, Q_3}$ は直線 $\mathbf{kL_{23} - k'L_{56} = 0}$ 上にある

ブリアンションの定理

ブリアンションの定理
円錐曲線に外接する六辺形 ABCDEF の 3 組の対角線 AD,BE,CF は 1 点で交わる

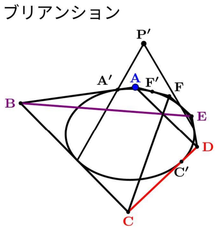


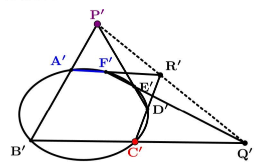
ブリアンションの定理の証明

双対平面の対応　点 (極) $\Longleftrightarrow$ 直線 (極線)

ブリアンション	A	B	$\cdots$	CD	DE	$\cdots$	BE	CF	AD
パスカル	F′A′	A′B′	$\cdots$	C′	D′	$\cdots$	P′	Q′	R′

ブリアンション　　　　　パスカル

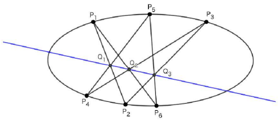




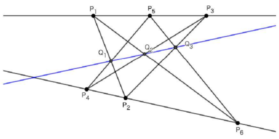
$\mathbf{AD, BE, CF}$ が共点　$\Longleftrightarrow$　$\mathbf{P', Q', R'}$ が共線

パスカルの定理とパッポスの定理

パスカル
既約な二次曲線上の六辺形



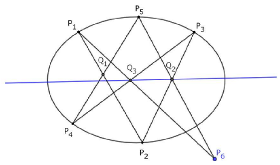
パッポス
可約な二次曲線上の六辺形

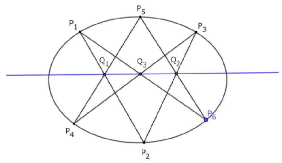


パスカルの定理の逆

パスカルの定理の逆

既約二次曲線 $\mathbf{C}$ 上に 5 点 $\mathbf{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5}$ がある。
平面上の点 $\mathbf{P_6}$ に対し，六辺形 $\mathbf{P_1P_2P_3P_4P_5P_6}$ の 3 組の対辺の交点が一直線上にあれば，$\mathbf{P_6}$ は $\mathbf{C}$ 上にある。





参考文献

- 難波 誠，平面図形の幾何学，現代数学社（2008）

海城プレスでの実施報告のまとめ

担当者の報告

１日目 1623 年に生まれ、1662 年に没した数学者にして物理学者、そして哲学者である B. パスカル。その生誕四百年を記念して、今夏の数各科リレー講座が行われます。学年の枠を越えて、150 名余の意欲的な受講者が講堂に集います。

初日は、今回の講座の内容の簡単なガイダンスと、パスカルの思想書である『パンセ』とそのなかにあるいわゆる「パスカルの賭け」について紹介しました。

そして本日のテーマである、『パスカルの三角形』とその周辺の話題へと移りました。

まず、多項式の展開の復習をし、その後、「二項定理」を紹介。この辺りが初めての学習となる中１、中２生の多くが、パスカルの三角形が多項式の係数に関係することに驚いていました。

後半は、パスカルの三角形に潜む有名数列を十例ほど紹介。三角数をはじめ、フィボナッチ数列やカタラン数など、いわば数学上の『名優』たちの登場に、多くの受講者が魅了されていました。

最後の約 30 分は、有用なツールである『オンライン整数大事典』を用いた『パスカルの三角形に潜む名優の大捜索大会』とし、会場は大いに盛り上がりました。

ここでは中１、中２が大活躍。結果、複数の生徒が上記のオンライン大事典中に納められている有名数列を発見！ 150 名余が数学上の新しい発見?!?に立ち会うことができ、興奮歓喜のうちに初日が終了しました。

名優探しの体験を通して、数学も自然科学の一部ゆえ、『発見がさき、論理はあと（故山本矩一郎先生の言葉)』であることが受講者に体感されれば、初日担当としてこれにすぐる喜びはありません。

さて、発見できたみなさん！ つぎは論理をつけて『数学』にするターンです。是非ともそれを成功させ、夏の掉尾を飾って欲しく思います。 初日担当者

２日目 2 日目の前半では、パスカルがフェルマーと解いた、確率論の起源と言われる未完のゲームの問題（分配問題）を扱いました。1 日目で数三角形について学んだ生徒たちは、確率の問題にも数三角形が関係していることに驚いていました。

後半では前半で登場したカルダーノ・ガリレオのサイコロ問題（いくつかのサイコロを投げて出た目の和のうち、最も出やすい値は何か？）を扱ったのちに、余事象や期待値といった確率におけるいくつかの興味深いトピックを取り上げました。特に、余事象を通して「確率１％の意味」と、効用やリスクの概念に触れながら「人間は期待値だけでは動かない」という 2 点を、中学一年生にも理解できるように説明しました。

３日目 3日目は、パスカルが16歳のときに発見した「パスカルの定理」と関連する諸定理について、初等幾何の知識を用いて証明を試みました。

まず始めに、土台として「パッポス（パップス）の定理」を紹介するとともに、2直線の位置関係や点の取り方を色々と変えて実際に作図してみました。点の位置が変わっても、ルールに従って定めた3点が必ず一直線上に並ぶことには「この事実を16歳で見つけたパスカルはすごい！」と驚きの声があがっていました。講座ではメネラウスの定理とその逆を紹介し、この2つを用いてパッポスの定理の証明も行いました。

パッポスの定理は2直線上に3点ずつ点をとっていましたが、これが直線ではなく円周上に6点をとっても同様の事実が成り立つということを手を動かして確認し、パッポスの定理を発展させた形としてパスカルの定理（円の場合）を紹介しました。証明するための道具として「方べきの定理」を導入し、メネラウスの定理を複数回用いることで円の場合におけるパスカルの定理を証明することができました。メネラウスの定理をまだ学習していない中学1年生にとっては、三角形と直線が交わらないとき（辺の延長と交わる場合）にどのように適用するのか苦労している様子が伺えましたが、なんとか食らいつこうとする姿が印象的でした。パスカルの定理は円だけでなく円錐曲線（楕円・放物線・双曲線）でも成り立ちます。今回は初等幾何のアプローチで証明しましたが、後半3日間で「射影平面」という概念を導入すると鮮やかに示せるので乞うご期待。

最後に、これまでも度々登場したパスカルの著書「パンセ」について、より掘り下げて紹介しました。「考える葦」以外にも、「クレオパトラの鼻」や先輩にあたる「デカルト批判」、「幾何学と繊細」の一節にふれ、パスカルの考えに受講者全員で思いをめぐらせながら、リレー講座前半が幕を閉じました。

４日目 リレー講習の四日目、講義の前半では、ブリアンションの定理を紹介しました。ブリアンションの定理とは、『円錐曲線に外接する六角形ABCDEFの対角線AD, BE, CFが1点で交わる』という、とてもシンプルな定理です。講義では、円錐曲線における極と曲線の関係を巧みに利用することで証明をすることができましたが、この証明には穴があります。『2直線の交点が存在しない場合』の議論が抜けていたのです。これを解決するために後半の話に引き継ぎました。

講義の後半では、前半の問題点の解決のために『射影平面』という概念を導入しました。この射影平面上ではどのような2直線も必ず交わります。つまり、平行な2直線も無限遠点で交わると考えるのです。射影平面を用いた議論をすることで、ブリアンションの定理の場合分けは不要になりますが、ここで得た概念を5日目と6日目に深掘りしていき、最終的にブリアンションの定理の証明を完成させたいと思います。

５日目 5日目では、まず4日目後半で得た射影幾何学のイメージを携えて『射影平面』について更に詳しく考えていきました。射影とはその名の通り(光源からスクリーンへ)射した影を表し、その光源に目をやれば、1本の光線は1点の影になることが分かりま

す。これが“直線を点とみる”という射影平面を理解する上で欠かせない考え方であり、このことを用いて座標や無限の彼方にある点が定義できることをみました。また、射影平面を考える理由の１つに、「2 直線は必ず１点で交わる」ことが挙げられ、この証明も“点を直線とみる”ということを用いて幾何学的に行いました。

後半には、パスカルの定理と合わせて射影幾何学の基本定理と呼ばれる『デザルグの定理』を、ユークリッド平面上にある場合と比べながら、場合分けが必要ない射影平面上で考えることが自然であることをみたのち、代数的に証明しました。

最終日 ６日目講義の前半は射影平面の双対という概念に触れました。

ある射影平面上でのいくつかの「点」と「直線」に関する定理は、「点」と「直線」を入れ替えた命題 (=双対命題) でも成り立つということを双対平面を導入することで証明しました。そして、5 日目で学んだデザルグの定理の双対命題を考えることで、新たな定理を手に入れることができました。さらに、既約な二次曲線が絡んだ場合でも双対命題は成り立つことを確認し、射影平面の双対性の美しさに感動しつつ、加えていままで登場してきたパスカルの定理とブリアンションの定理には実は関係があったことを仄めかして後半にバトンを渡しました。

６日目後半は，パスカルの定理の証明と，双対性によりブリアンションの定理を示す内容でした。

射影平面を導入することで，２直線が平行か交わるか区別することなく定理を記述し，代数的な手法で証明を与えました。証明の記述は多少煩雑に見えますが，用いる性質は難しくなく，読み返してみれば理解できるものです。次に，具体的な点と直線の対応をつけることで，２つの定理が双対定理であることを確かめ，４日目の懸案であったブリアンションの定理を鮮やかに（実質的な証明はせずということ）示しました。

６日間のリレー講座の後半は，パスカルの定理を目標に，若いパスカルが著した「円錐曲線論」から，双対原理とともに大きく発展した射影幾何学を辿ることで終了しました。

受講生の感想

1 日目

（中 **1**）　１日目の講座は、とても面白かったです。特に、僕は探求 time が好きなのですが、パスカルの三角形から、かくされた数列を見つけるというスケールの大きい探求は、とてもワクワクしました。発見して前にたったときはすごく緊張しましたが、数列が存在することがわかったとき“数列の差を書き出し、さらにその差を書き出すと、元の数列がずれたそのままの数が並んだ数列になるような、おもしろい数列”があることにとてもおどろきました。また、自分の気持ちがわきかえるようで、とてもワクワクす

る授業でした。やっぱり数学っていいな〜と思い、自分への励みにもなりました。また、何かの授業で、探求 time があるといいなとおもいます。

（中 1） 僕はパスカルの三角形には中学受験の塾で初めて出会いました。そのときには講座の中で言われていた自然数と三角数しか習いませんでした。そのためこの講座でフィボナッチ数やカタラン数が隠れていると知ったときにはとても驚きました。そして、その後の探求 time では友達が数列を見つけているのを見て、それだけたくさんの数列が隠されていると感じることが出来ました。

（中 1） １日目の講座は、とても面白かったです。特に、僕は探求 time が好きなのですが、パスカルの三角形から、かくされた数列を見つけるというスケールの大きい探求は、とてもワクワクしました。発見して前にたったときはすごく緊張しましたが、数列が存在することがわかったとき“数列の差を書き出し、さらにその差を書き出すと、元の数列がずれたそのままの数が並んだ数列になるような、おもしろい数列”があることにとてもおどろきました。また、自分の気持ちがわきかえるようで、とてもワクワクする授業でした。やっぱり数学っていいな〜と思い、自分への励みにもなりました。また、何かの授業で、探求 time があるといいなとおもいます。

（中 1） 僕はパスカルの三角形には中学受験の塾で初めて出会いました。そのときには講座の中で言われていた自然数と三角数しか習いませんでした。そのためこの講座でフィボナッチ数やカタラン数が隠れていると知ったときにはとても驚きました。そして、その後の探求 time では友達が数列を見つけているのを見て、それだけたくさんの数列が隠されていると感じることが出来ました。

（中 2） 今回の数学科リレー講習で、パスカルの三角形は多項式の乗算に使えるのだと知ってとても驚きました。

また、パスカルの三角形の中に存在するさまざまな規則をもつ数列に興味を持ちました。

それを自分で見つけ出す作業が面白かったです。

去年もこの講座を受けたのですが、毎年取り上げられるテーマが違い、飽きることがない講座です。

色々な先生から講義を受けられる上、話し上手な先生が多く、難しい内容でもわかりやすいため、来年も受けたいと思っています。

（中 2） パスカルの三角形にこれほど多くの有名数列や規則性が隠れているのが不思議で、規則性の１つでもいいので自分で証明してみたくなりました。

また、パスカルの三角形の中から、独自の視点から有名数列を自分で見つける事が出来たのは自分でも驚きました。嬉しかったです。

このリレー講座は、数学が面白いと思わせてくれて、自分で調べるためのヒントをくれる講習だと思います。

講習初日のお話で、明日以降の内容にとても興味が深まりました。凄い講習をして下さり、ありがとうございます。

（中 2） パスカルの三角形の中に様々な数式が隠れているのを知りパスカルの三角形の偉大さにとても驚きました。実際に数式を見つけるところを見て感動しました。

２日目

（中 1） 中一の僕でもわかるように、全体的にわかりやすく 1 から説明されていた。

初めは全く関係ないと思っていたが、確率の計算が数三角形の中に出てきたので不思議に思った。

また、「100 回やれば当たる」ことと「1/100 の確率で当たる」ことの違いの説明がよくわかった。

（中 1） 今まであまり触れたことのなかった確率論を題材として初心者の僕でも楽しくわかりやすく学べてよかったです。家でもいろいろなパターンで考えてみたいです。

（中 3） 1 日目のパスカルの三角形の話題から二日目の今日は確率の話題でどうつながるのかと思っていたが、確率にもパスカルの三角形が応用できたり、そこから現実的な話まで拡張されるところが面白いと思った。

３日目

（中２） パッポスの定理という新しい定理がとても面白かった。いろいろな場合でも交わる 3 つの点が一直線であることに驚いた。パッポスの定理の証明において、メネラウスの定理を使うためかなり難しかったが、少し理解でき興味をもった。パスカルの定理でもメネラウスの定理と方べきの定理を使っており、メネラウスの定理がキーになっていることを知った。どちらの定理もいくつかを組み合わせてから証明しなければいけないのでややこしかったが、先生方の説明が分かりやすかった。1 番おどろいたのが、楕円でもパスカルの定理が成り立つというものだった。放物線も成り立つのを知って確かめたいと思った。最後に「パンセ」を読んだ。パスカルは哲学者でもあり「人は考える葦」という言葉を残しており彼自身の考え方がよく分かり、興味深くパスカルの天才さがよく分かった。

（中 1） 1 日目、2 日目よりもレベルの高い話しだったけれど、その分集中して考えられて良かったです。また証明の問題では新しい定理を知れたことが嬉しかったです。パンセの話ではパスカル独自の思想に触れられ、哲学に興味がわきました。

（中 1） パッポスやパスカルの見つけた定理を知り、証明の仕方を知ることができ良かった。

（中 2） パッポスの定理とパスカルの定理は結構難しそうなのに、知っている定理で証明できるのが面白かった。

（高 1） 僕がリレー講座で 1 番面白かったのは 3 日目のパッポスの定理の証明です。最初は座標平面という制限下で成り立っているのを示し、次に任意の 2 直線でも成り立っていることに驚きを感じました。その証明を自分が今まで習ってきたメネラウスの定理で行っていることに感動しました。この 3 日間で改めて数学は奥深く面白いものだと実感しました。

4 日目

（中 3） ユークリッド幾何での平面に無限遠点という概念を加えるだけで 2.5 次元みたいな射影平面ができることに、数学の奥深さと難解さを感じた。この世界なら $90°, 90°, 0°$ の三角形を作ったり、色々面白いことができそう。

同値関係や極など知らないことを色々知れて興味が湧いた。〜以外の同値関係の同値類の集合がどんなものになるのか考えてみたい。

5 日目

（中 3） 4 日目に無限遠点の導入があったが、5 日目は射影平面を使って方向があるという話から入った。真逆の方向にある無限遠点は同一直線上にあるため、同じように表すことができるというところが少し変な感覚になったが、実際そうなることがわかって面白かった。さらに円状に取り囲んでいる無限遠点の集合を無限遠直線と呼ぶことも深みを感じた。無限遠点で交わることが通常の数学で言う平行概念をひっくり返すような講義だった。

6 日目

（中 2） 僕は今回の講習を通して、今までの数学の知識をすごく広げられたと感じた。今回の講習の後半では射影幾何学について学んだが、僕は射影幾何学について全く知らなかったのですごく新鮮だった。また、5 日目に出てきた「無限遠点」と言う考え方や、それを使ったパスカルの定理の証明はユークリッド平面の時と比べすごくスッキリしていてわかりやすかった。そして、今回の講習ではパスカルの定理以外にもパッポスの定理、デザルグの定理などさまざまな定理を知ることができてとても面白かった。

（中 3） 最初に双対について説明があり、それを実際に考えることができてよかった。また、それをつかってパスカルの定理からブリアンションの定理を証明するところがきれいだと思った。ふつうの平面上のブリアンションの定理では不足しているところを射影幾何で完璧に証明できていて感動した。