積分の向きについての考察

小澤嘉康*

2024 年 2 月 25 日

1　はじめに

線積分において，その積分経路を逆向きに辿ると値が -1 倍されるのは有名な性質である．この性質があるからこそ，グリーンやストークスの定理の証明が簡潔に記述することができる．

2024 年度に本校で設置される「高３探究授業」で高校で習得する微積分とベクトルの融合と称して，「多変数関数の微積分」（小澤 [6]）を扱うことにした．その準備の段階で，この線積分の性質は常に成り立つのではないことに気がついた．ベクトル解析を修得されている方からすれば当たり前のことかもしれないし，単に自分自身の勉強不足だけかもしれないが，このことを明確に記載している文献が見つからないこともあったので，本稿を著すことにした．

結論を述べれば，「スカラー場の線積分は経路のパラメータのとり方によっては，逆向きの経路でも -1 倍されないことがある」である．一方でベクトル場の線積分は経路の向きに依存するので，グリーンやストークスの証明法に影響はない．面積分でも同様の結論になるのでガウスの証明法も大丈夫である．

以下では，まずいくつかの具体例をあげる．逆向きの経路なのに値が変わらないものも，-1 倍されるものもある．

その後，なぜこのようなことになるのかを分析する．スカラー場の線積分は通常の 1 変数の積分の拡張と捉えられるが，一方で通常の 1 変数の積分は積分区間の向きに依存する．この違いの本質は何かを調べ，「積分の向き」について考察する．

最後に補足ではあるが，通常の 1 変数の積分の拡張としての線積分は何であるかについても触れる．

多変数については本稿では触れないが，同様の議論は面積分にも対応することを付け加えておく．

*海城中学高等学校　数学科　ozawa@kaijo.ed.jp

2　具体例

経路 C を，原点 O(0, 0, 0) から点 A(1, 1, 1) への線分とし，スカラー場を $f(x,\, y,\, z) = xyz$ とする．逆向きの経路 $-C$ は，点 A(1, 1, 1) から原点 O(0, 0, 0) に向かう．

- 経路 C のパラメータを $\boldsymbol{r} = (t,\, t,\, t) \quad (t : 0 \to 1)$ とする．

$$I_0 = \int_C f ds = \int_0^1 t^3 \times \sqrt{3}\, dt = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

- 逆向きの経路 $-C$ のパラメータを $\boldsymbol{r} = (1-t,\, 1-t,\, 1-t) \quad (t : 0 \to 1)$ とする．

$$I_1 = \int_{-C} f ds = \int_0^1 (1-t)^3 \times \sqrt{3}\, dt = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

- 逆向きの経路 $-C$ のパラメータを $\boldsymbol{r} = (t,\, t,\, t) \quad (t : 1 \to 0)$ とする．

$$I_2 = \int_{-C} f ds = \int_1^0 t^3 \times \sqrt{3}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- 逆向きの経路 $-C$ のパラメータを $\boldsymbol{r} = (t^2,\, t^2,\, t^2) \quad (t : 1 \to 0)$ とする．

$$I_3 = \int_{-C} f ds = \int_1^0 t^6 \times 2\sqrt{3} t\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- 逆向きの経路 $-C$ のパラメータを $\boldsymbol{r} = (1-t^2,\, 1-t^2,\, 1-t^2) \quad (t : 0 \to 1)$ とする．

$$I_4 = \int_{-C} f ds = \int_0^1 (1-t^2)^3 \times 2\sqrt{3} t\, dt = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

以上の例のように，$I_1,\, I_4$ のように I_0 と同じ値になるものと，$I_2,\, I_3$ のように $-I_0$ と -1 倍されるものがある．

このようなことはベクトル場ではおきず，経路が逆向きの場合必ず -1 倍されることを確認しておく．

経路 C を，原点 O(0, 0, 0) から点 A(1, 1, 1) への線分とし，ベクトル場を $\boldsymbol{A}(x,\, y,\, z) = (yz,\, zx,\, xy)$ とする．

- 経路 C のパラメータを $\boldsymbol{r} = (t,\, t,\, t) \quad (t : 0 \to 1)$ とする．

$$J_0 = \int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (t^2,\, t^2,\, t^2) \cdot (1,\, 1,\, 1)\, dt = 1$$

- 逆向きの経路 $-C$ のパラメータを $\boldsymbol{r} = (1-t, 1-t, 1-t) \quad (t : 0 \to 1)$ とする.

$$J_1 = \int_{-C} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (\,(1-t)^2,\,(1-t)^2,\,(1-t)^2\,) \cdot (-1,\,-1,\,-1)\,dt = -1$$

- 逆向きの経路 $-C$ のパラメータを $\boldsymbol{r} = (t, t, t) \quad (t : 1 \to 0)$ とする.

$$J_2 = \int_{-C} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (t^2,\,t^2,\,t^2) \cdot (1,\,1,\,1)\,dt = -1$$

- 逆向きの経路 $-C$ のパラメータを $\boldsymbol{r} = (t^2, t^2, t^2) \quad (t : 1 \to 0)$ とする.

$$J_3 = \int_{-C} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_1^0 (t^4,\,t^4,\,t^4) \cdot (2t,\,2t,\,2t)\,dt = -1$$

- 逆向きの経路 $-C$ のパラメータを $\boldsymbol{r} = (1-t^2, 1-t^2, 1-t^2) \quad (t : 0 \to 1)$ とする.

$$J_4 = \int_{-C} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 ((1-t)^2,\,(1-t)^2,\,(1-t)^2) \cdot (-2t,\,-2t,\,-2t)\,dt = -1$$

となり，逆向きの経路の場合，パラメータの入れ方によらず

$$\int_{-C} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

が成り立つ.

では，スカラー場の線積分において，どのような条件のもとで，$-I_0$ となるのか．上記の例を見ると，I_2 と I_3 の共通点はパラメータ t が減少することである．実はこれは正しい．以下ではこのことを考察する.

3　積分の定義の見直し

まず，スカラー場の線積分の定義を見直してみる.

定義【スカラー場の線積分の定義】.

点 A を始点, 点 B を終点とする曲線 C において, その分割 Δ を $A = P_0,\ P_1,\ \cdots,\ P_n = B$ とし，曲線 C 上の各部分 P_iP_{i+1} の長さを Δs_i とする.

リーマン和 $S_\Delta = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta si \quad (\xi_i \in P_iP_{i+1})$ とする．このとき，$|\Delta| = \max \Delta s_i$ として，極限 $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta$ が収束するとき，曲線 C 上のスカラー場 f の C 上での線積分を次の式で定義する.

$$\int_C f\,ds = \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta$$

曲線 C が，曲線の長さ s をパラメータとする $\varphi(s)$ で表されるときは，

$$\int_C f ds = \int_0^L f(\varphi(s))ds$$

となる．ここで，曲線 C の長さを L とした．

イメージとしては，曲線上に建つ壁の面積なので，線積分が通常の 1 変数の積分の拡張といわれる由縁である[1]．

スカラー場の線積分の定義のままでは計算しづらいので，実際は以下のようにする．

定理【スカラー場の線積分の計算方法】．

曲線 C がパラメータ t を用いて $C : \boldsymbol{r}(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ で表されるとき，$ds = \left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$ より，

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt\ .$$

と計算することができる．

つまり，線積分の値を実際の求めるときは通常の 1 変数の積分計算をすることになるので，ここで，通常の 1 変数の積分の定義も確認しておく．

定義【通常の 1 変数の積分の高校の教科書での定義】．

関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき，a, b の大小によらず，定積分を次の式で定義する．

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

もちろん 1 変数の場合はこの定義で十分であるが，２変数以上になるとこの定義のまま拡張することはできないので，リーマン和を用いて定義をしなおすことになる．

定義【通常の 1 変数の積分のリーマン和での定義〜向きなし】．

区間 $[a, b]$ の分割 Δ を考え，リーマン和 $S_\Delta = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)|x_{i+1} - x_i| \quad (\xi_i \in (x_i,\, x_{i+1}))$ と

[1] 例えば，斜めに切った円柱の側面積も線積分で求めることができる．

する．このとき，$|\Delta| = \max|x_{i+1} - x_i|$ として，極限 $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta$ が収束するとき，定積分を次の式で定義する．

$$\int_{[a,\,b]} f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta$$

ここで，積分の表現を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と定義する流儀もあるが，$a < b$ であるので，現時点で $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ という式は意味をなさないことに注意が必要である．では，$a < b$ に対して $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ はどのように定義するのであろうか．

定義【通常の１変数の積分のリーマン和での定義〜向きあり】．
$a < b$ とする．$\displaystyle\int_{[a,\,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ と表した上で，定積分 $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ を「便宜的」に次の式で定義する．

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

ここが積分に「向き」が入る瞬間である．なお，何が「便宜的」なのかといえば，このように積分に向きを入れることで，いわゆる微分積分学の基本定理が成り立つということである．すなわち，定積分は原始関数で計算できるという高校数学の定義が出てくるのである．

積分計算をするときには，リーマン和の極限で求めることはまずなく，普通は原始関数の差で求める．つまり，「積分」といえば「向きあり」を考えているということである．

4　積分の向きついて

スカラー場の線積分の定義と，通常の 1 変数の積分の一連の定義を比較すると気がつくことは，そもそも線積分の定義には「向き」が入っていないのである．したがって，スカラー場の線積分を計算するときに，曲線 C を点 A から辿っても，逆に点 B から辿っても積分の値が常に同じであれば納得がいく．しかしながら，実際はそうではなく，同じときもあれば，-1 倍のときもあるので，話は簡単ではない．

スカラー場の線積分の定義では，曲線の長さ s をパラメータにとっているが，実際の計算は曲線の長さをパラメータにとることはあまりなく，別のパラメータ表示 $\boldsymbol{r}(t)$ を用いることが多い．その計算方法が定理である．

この定理での積分はもちろん「向きあり」である．そして，この定理の本質は「s から t の変数変換」である．通常の 1 変数の積分の変数変換では，$ds = \dfrac{ds}{dt}\,dt$ のようになるが，スカラー場の線積分では，$ds = \left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$ である．違いは ds と dt 比の値が負になりうるかどうかである．つまり，通常の 1 変数の積分では，パラメータ t が減少する向きに入っていたとき，$\dfrac{ds}{dt} < 0$ となり，積分区間の向きとキャンセルするので積分値は変わらないが，スカラー場の線積分では，必ず $\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| > 0$ なので，積分区間の向きとキャンセルすることがないので，積分値が -1 倍されることになる．(c.f. 重積分の変数変換[2])

以上を踏まえて，改めて例の計算結果を見直すと，パラメータ t が $1 \to 0$ と減少している $I_2,\ I_3$ で値が -1 倍されていることに納得がいく．

スカラー場の線積分を計算するときは，パラメータを入れる向きに注意せよ，ということである．

以上を踏まえた上で，次の 2 つの点に注意しておく．

- 1 つ目は，スカラー場の線積分の定義で曲線の長さ s をパラメータにとっているが，逆向きの $-C$ の場合，$s : L \to 0$ と解釈すれば良いのではないか？
- 2 つ目は，ベクトル場の線積分ではなぜうまくいくのか？

1 つ目．逆向きの $-C$ の場合，$s : L \to 0$ と解釈することで，スカラー場の線積分でも $\int_C f\,ds = -\int_C f\,ds$ が成り立つとする文献もある．しかしながら，この立場をとると，曲線には「固有の基準があり，そこからの向き付きの距離でパタメータが入る」ということを要請することになるので，現実的ではない．特にグリーンやストークスの定理の証明のように，曲面を格子状に分割するとき，それぞれの部分の周の曲線に対してこの要請をみたすようなパラメータを入れるのは困難である．

なお，通常の 1 変数の積分に対しては「向き」を入れることができるのは，座標空間において，まずはじめに固有の基準である原点があり，そこからの向き付きの距離である座標軸がもつ座標平面の存在が先にあるからである．

[2] 重積分の変数変換では，$(u,\,v) \to (x,\,y)$ のとき，$dxdy = \left|\dfrac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\right| dudv$ と Jacobian に絶対値がつくので同じ状況が起こりかねないが，実際計算するときは（無意識かもしれないが）$x,\,y$ も，$u,\,v$ も増加する向きに考えているので正しい値が求まる．

２つ目．ベクトル場の線積分の定義は，曲線 C の分割の各部分とベクトル場との内積がスカラーなので，そのスカラーの線積分 $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{A}(\xi_i)\cdot\overrightarrow{P_iP_{i+1}}\,\Delta s_i$ と定義するが，この内積を考えるときに曲線の向きの情報が含まれる．また，変数変換の式も，

$$d\boldsymbol{r}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)dt$$

と絶対値が入らないので，パタメータ t の向きに応じて微分係数の符号が定まるので正しい値が求まる．

この観点から改めてスカラー場の線積分をみると「そもそもスカラーには向きがないので，その積分には向きは入らない」ともいえるだろう．

5　補足１　通常の１変数の積分とスカラー場の線積分との関係

通常の 1 変数の積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は線積分の特別なケースであるといわれるが，それはどういう意味の線積分と捉えればよいのか？

それには，通常の 1 変数の積分でも「向きなし」と「向きあり」で区別する必要がある．

「向きなし」の積分，すなわちリーマン和の極限の積分においては，スカラー場の線積分の特別なケースと捉えるのがよい．前述のように，曲線上に建つ壁の面積のイメージである．

では「向きあり」の積分に対してはどうか．これまでの議論からわかるように，今まで議論してきた型のスカラー場の線積分には「向き」がないので，不向きである．実は，別の型のスカラー場の線積分が対応する．それは，スカラー場 $f(x,\,y,\,z)$ に対して，ベクトル値の線積分

$$\int_C f d\boldsymbol{r}=\left(\int_C f(s)\,dx,\quad \int_C f(s)\,dy,\quad \int_C f(s)\,dz\right)$$

である．$d\boldsymbol{r}=(dx,\,dy,\,dy)$ のベクトルであり，この線積分は「向きあり」である．通常の 1 変数の積分，例えば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，積分経路を C を x 軸の区間 $a\leqq x\leqq b$ の増加方向ととれば，$y=0,\,z=0,\ dy=dz=0$ より，

$$\int_C f d\boldsymbol{r}=\left(\int_C f(x,\,0,\,0)\,dx,\ 0,\ 0\right)\overset{id}{=}\int_a^b f(x)\,dx$$

とみなせる[3]．

---

[3]例えば，$f(x)=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ とする．$C:\boldsymbol{r}=(\pi t,\,0,\,0)\ (0\leqq t\leqq 1)$ で $f(x,\,y,\,z)\overset{id}{=}f(x)=\sin x$

6　補足２　リーマン和の積分で向きを入れる定義について

積分をリーマン和の極限で定義するときに，はじめから「向き」を入れる方法もある．それはリーマン和を $S_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$ と定義する．つまり，$|x_{i+1}-x_i|$ ではなく $(x_{i+1}-x_i)$ とする．このとき，$a>b$ の場合は，$x_{i+1}-x_i<0$ となるので，自然に $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ が成り立つ．

ただし，それでも多くの文献では，このまま重積分に拡張せず，重積分では「向きなし」で定義するものがほとんどである（森 [4] は重積分も向きを入れた定義をしている）．

なお，本稿の議論と同様のことが，重積分の向きとスカラー場の面積分にも対応する．

また，複素積分は通常 $\Delta z = z_{i+1}-z_i$ と定義するので，はじめから向きが入った状態で定義される．

参考文献

[1] 笠原皓司．微分積分学（サイエンスライブラリ数学 12）．サイエンス社，1974.

[2] 深見哲造．ベクトル解析（数学ワンポイント双書 12）．共立出版，1977.

[3] 増田真郎．ベクトル解析（サイエンスライブラリ理工系の数学 5）．サイエンス社，1975.

[4] 森毅．ベクトル解析（ちくま学芸文庫）．筑摩書房，2009.

[5] 涌井良幸．高校生からわかるベクトル解析．ベレ出版，2017.

[6] 小澤嘉康．探究２４の授業草案　ベクトルと微積分の融合〜多変数関数の微積分の世界〜．海城学園研究集録　第 48 集，2024.

より，

$$\int_C f d\boldsymbol{r} = \left(\int_0^1 f(x(t),\, y(t),\, z(t))\frac{dx}{dt}dt, \int_0^1 f(x(t),\, y(t),\, z(t))\frac{dy}{dt}dt, \int_0^1 f(x(t),\, y(t),\, z(t))\frac{dz}{dt}dt\right)$$
$$= \left(\int_0^1 \sin \pi t \cdot \pi\, dt,\ 0,\ 0\right) \overset{id}{=} \int_0^1 \sin \pi t \cdot \pi\, dt = \int_0^\pi \sin x\, dx$$