探究２４授業草案

ベクトルと微積分の融合

〜多変数関数の微積分の世界〜

小澤 嘉康*

*海城中学高等学校　数学科　ozawa@kaijo.ed.jp

はじめに

本稿は２０２４年度の高校３年で行う探求の授業草案である．

探究の時間は，週 1 時間であり，しかも２学期までの授業なので，20 数時間しかない．そこで，概念や証明を厳密に扱うよりも，将来理工系に進んだときに少しでも使えるものを身につけることを目指した．

また，多変数関数の微積分であるが，実際の計算はほとんど 1 変数の微積分である．受験生という立場でもあるので，大学入試で使う微分積分の計算力の向上も目的とした．

とにかく，高３という受験生の負担を最小限としながらも，せっかくの機会なので，より多くのものを得られるように心がけたい．

本稿ではなるべく証明を載せてあるが，授業の基本方針としては，定理の内容を理解して，実際に多くの例を計算することで，その性質を感覚として身につけて欲しいと考えている．

授業で扱う例題や演習問題は，授業の様子を見ながら選択するつもりである．

また，現行のカリキュラムには「行列」がないので，ほとんどの高校生においては新しい概念であるが，多変数を扱う以上，行列は必須の事柄である．授業では必要に応じて説明をしていくが，実は原稿の締め切り日の関係で本稿には含まれていない．

以上のように，授業草案とはいいながらも，未だ不十分なところも多くあるのだが，大枠はまとめたつもりである．高校生を対象にした多変数関数の微積分の授業は初めてであるので，皆様からご意見ご感想をいただければ幸いである．

一年後，実際に扱った問題や未収録の事項をまとめた上で，授業報告という形で，改めて研究集録に載せたいと考えている．

最後に，いつものことながら，原稿の提出が遅くなってしまい，研究集録委員会の皆様に多大なるご迷惑をおかけしたことをこの場を借りてお詫び申し上げる．

2024.3.11　小澤　嘉康

目次

第1章　必要事項の準備と既存の知識のBrush UP

1.1　微分

1.1.1　微分の定義のブラッシュアップ

高校の教科書では関数 $f(x)$ が $x = x_0$ において微分可能であることは，極限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

が存在することで定義し，その極限値を微分係数といい，$\dfrac{df}{dx}(x_0)$ や $f'(x_0)$ とあらわした．
１変数関数の場合はこの定義で十分であるが，２変数以上の関数に対してはこの定義のまま拡張することはできない．
例えば平面 $z = f(x, y) = x$ のとき，点 $(0, 0)$ においてそのまま拡張した極限の式は，

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{|(x, y) - (0, 0)|} = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

となるが，$y = 0$ の x 軸上から $(0, 0)$ に近づけただけでも極限値は存在しない．この定義だと平面のような基本的な図形であっても微分できないことになり，さすがに不便であるし，そもそも「微分する」とはどういうことなのかという根本的な事柄が反映されていない．

そこで，この高校の教科書で習った定義を，微分することの意味を捉えながら２変数以上の関数でも同じように拡張できるようにブラッシュアップする．
極限値を α とする．

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

となるので，分子の $f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)$ が $x - x_0$ より速く 0 に収束するような実数 α が存在することが「微分可能である」ということになる．ここで「$x - x_0$ より速く 0 に収束する」とは，１次式より次数が高いということである．ざっくり言えば，$x - x_0$ の１次より大きい項を無視したとき，$f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0) = 0$ ということなので，最良の１次近似式であると言える．

では，この 1 次近似式は何を表しているのだろうか．図形的に理解するために，$y=f(x)$，$y_0=f(x_0)$ とおくと，

$$y=y_0+\alpha(x-x_0)$$

となる．これは，曲線 $y=f(x)$ 上の点 (x_0,y_0) を通る傾き α の直線を表すことがわかる．しかも，この直線は曲線 $y=f(x)$ を最も良く近似している直線なので，接線を表している．
以上をまとめると，微分可能であるとは，接線が存在することであり，微分係数は接線の傾きであるということである．これを踏まえて，微分可能の定義を次のようにブラッシュアップする．
その前に 1 つ記号を準備する．

定義【小さいオーダー】．
$h\to 0$ のとき，h よりも速く 0 に収束する式を $o(h)$ で表す．すなわち，$o(h)$ と書かれた式は，

$$\lim_{h\to o}\frac{o(h)}{h}=0$$

をみたす．
$o(h)$ をランダウの記号ともいう．

補足．
・ $p(h)$ を h の多項式とするとき，$p(h)o(h)$ は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{p(h)o(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}\cdot p(h)=0$ より，$o(h)$ である．(多項式の吸収)
・ $0<h\leqq ak+o(k)$ のとき，$k\to 0$ のとき $h\to 0$ なので，

$$\lim_{k\to 0}\frac{o(h)}{k}=\lim_{\substack{k\to 0\\ h\to 0}}\frac{o(h)}{h}\cdot\frac{h}{k}\leqq\lim_{\substack{k\to 0\\ h\to 0}}\frac{o(h)}{h}\cdot\frac{ak+o(k)}{k}=0$$

より $o(h)$ は $o(k)$ である[1]．
・ また，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{o(o(h))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{o(o(h))}{o(h)}\cdot\frac{o(h)}{h}=0$ より，$o(o(h))$ は $o(h)$ である．
・ $|o(h)|$ や $o(|h|)$ も $o(h)$ である．
・ 感覚として，$o(h)$ は h の 1 より大きいべきの項，つまり $h^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ のように扱えばよい．

定義【微分可能性，微分係数】．
$f(x)=f(x_0)+\alpha(x-x_0)+o(x-x_0)$ と表せるとき，$f(x)$ は $x=x_0$ で **微分可能** であるという．

このとき，α は，

$$\alpha=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

[1] 大きいオーダーの記号を用いて $h=O(k)$ と表すことができる．$o(h)$ は $O(h)$ なので 次の性質も本質的に同じである．

をみたす．

この α を $f(x)$ の $x=a$ での**微分係数** といい，$\dfrac{df}{dx}(x_0),\ f'(x_0)$ などと表す．

注意．

教科書の定義は，微分係数の計算方法であり，この計算の極限が存在すれば，新しい定義での微分可能がいえるので，教科書の定義で十分ということである．

ざっくりいえば，「微分可能 $\Longleftrightarrow$ 微分係数が存在」ということである．

繰り返しになるが，このことは２変数以上の関数ではいえないので，定義をブラッシュアップした．

1.1.2　微分とは

ところで，「微分係数」とはその名の通り「微分」の「係数」のことであるが，その「微分」とは何であるかについて触れておく．

曲線 $y=f(x)$ が $x=x_0$ で微分可能なとき，$y_0=f(x_0)$ とすれば，接線の方程式は

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

で表すことができ，この $f'(x_0)$ が微分係数であった．ここで，点 (x_0,y_0) を基準とした新しい座標系 (dx,dy) を考える．つまり，

$$dx=x-x_0,\qquad dy=y-y_0\ .$$

すると，接線の方程式は

$$dy=f'(x_0)\,dx$$

と表せる．この dx,dy をそれぞれ $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ **の微分** というが，単に接線の方程式を dx,dy の斉次１次[2]方程式で表しただけである．この微分 dx の係数だから微分係数となる．また微分係数が傾きを表すことも明確である．

なお，図形的意味がわかりやすいように $y=f(x)$ としたが，関数は $y=$ とおくことは必須ではないので，この場合の微分の式は

$$df=f'(x_0)\,dx$$

となる．この式をみると，微分係数を $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ と表すことも納得がいくであろう．

この微分については，２変数関数のときにも改めて説明する．

[2]定数項のないすべての文字の１次式．$ax+by=0$ のようなもの．関数と見れば比例の式のこと．

1.1.3 合成関数の微分

$y = f(x)$ において，さらに x が $x = \varphi(t)$ と t の関数のとき，合成関数 $y = f(\varphi(t)) = f \circ \varphi(t)$ が考えられる．

> **定理【合成関数の微分公式】．**
> $\varphi(t)$ が t_0 で微分可能であり，$f(x)$ が $x_0 = \varphi(t_0)$ で微分可能であるとき，合成関数 $f \circ \varphi(t)$ は t_0 で微分可能であり，
> $$\frac{d}{dt} f \circ \varphi(t_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \frac{d\varphi}{dt}(t_0)$$
> が成り立つ．

証明は，教科書のように微分係数の定義式の極限の形式でも証明できるが，せっかくなのでブラッシュアップした微分可能の定義を用いいてみる．

証明．
$\varphi(t)$ が t_0 で微分可能であり，$f(x)$ が $x_0 = \varphi(t_0)$ で微分可能であるので，

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0) \tag{1.1}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \tag{1.2}$$

と表せる．ここで，$x = \varphi(t)$, $x_0 = \varphi(t_0)$ なので，式 (1.2) に代入すると，

$$f(\varphi(t)) = f(\varphi(t_0)) + f'(x_0)(\varphi(t) - \varphi(t_0)) + o(x - x_0)\ . \tag{1.3}$$

ここで，$o(x - x_0)$ について．式 (1.1) は

$$x - x_0 = \varphi'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

となるので，小さいオーダーの性質より，$o(x - x_0)$ は $o(t - t_0)$ である．
そして，式 (1.3) の $\varphi(t) - \varphi(t_0)$ を式 (1.1) で書き直すと，

$$f(\varphi(t)) = f(\varphi(t_0)) + f'(x_0)(\varphi'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)) + o(t - t_0)$$

より，

$$f \circ \varphi(t) = f \circ \varphi(t_0) + f'(x_0)\varphi'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)\ . \tag{1.4}$$

を得る．この式は，合成関数 $f \circ \varphi(t)$ は t_0 で微分可能であり，その微分係数は $f'(x_0)\varphi'(t_0)$ であることを表している．□

微分を用いた別証も紹介する．

証明.

$\varphi(t)$ が t_0 で微分可能であり，$f(x)$ が $x_0 = \varphi(t_0)$ で微分可能であるので，

$$dy = f'(x_0)\,dx, \quad dx = \varphi'(t_0)\,dt$$

と表せる．dx を代入すると，

$$dy = f'(x_0)\varphi'(t_0)\,dt$$

となるので，$y = f \circ \varphi(t)$ は t_0 で微分可能であり，微分係数は $f'(x_0)\varphi'(t_0)$ である．□

とても明瞭な証明である．微分とは関数を斉次 1 次式で近似したものであるので，合成関数の微分係数が，それぞれの微分係数の積になることも納得できるであろう．

この証明をイメージすれば，微分の計算も簡潔にできる．

例.

$y = \sin t^2$ の微分を求める．$x = t^2$ として

$$dy = (\sin x)' \cdot (t^2)'\,dt = \cos t^2 \cdot 2t\,dt = 2t\cos t^2\,dt\ .$$

よって，$(\sin t^2)' = 2t\cos t^2$ も求まる．

1.1.4 Taylor 展開

定義【C^n 級】.

$f(x)$ の n 次導関数が存在して連続のとき，$f(x)$ は $\boldsymbol{C^n}$ **級** であるという．

領域（定義域のこと）Ω において，C^n 級の関数の集合を $\boldsymbol{C^n(\Omega)}$ と表す．

定理【Taylor 展開】.

$f(x) \in C^n(\Omega)$ において．$[x_0, x] \subset \Omega$ （または $[x, x_0] \subset \Omega$） ならば，

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x - x_0)^m + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n$$

となる ξ が x と x_0 の間に存在する．

なお，$\dfrac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n$ を **Lagrange の剰余項**という．

証明.

x_0 はもちろん定数だが，x も固定して定数とみる．t の関数 $\varphi(t)$ を

$$\varphi(t) = f(t) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{n!} f^{(m)}(t)(x-t)^m + A(x-t)^n \tag{1.5}$$

とおく．ここで，$\varphi(x) = f(x)$ で，A は

$$\varphi(x_0) = \varphi(x) = f(x) \tag{1.6}$$

をみたすようにとる[3].

示すことは，$A = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$ となる ξ の存在である．$\varphi(t)$ を微分すると，

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= f'(t) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \left(f^{(m+1)}(t)(x-t)^m - m f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1} \right) - nA(x-t)^{n-1} \\
&= f'(t) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{(m-1)!} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1} - nA(x-t)^{n-1} \\
&= f'(t) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m - \sum_{m=0}^{n-2} \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m - nA(x-t)^{n-1} \\
&= f'(t) + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} - f'(t) - nA(x-t)^{n-1} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} - nA(x-t)^{n-1} .
\end{aligned}$$

$\varphi(x_0) = \varphi(x)$ であるので，平均値の定理[4]から $\varphi'(\xi) = 0$ となる ξ が x_0 と x の間に存在する．すなわち，

$$\varphi'(\xi) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-1} - nA(x-\xi)^{n-1} = 0$$

となる．したがって，

$$A = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \tag{1.7}$$

を得る．

式 (1.5) で $t = x_0$ として，(1.6)，(1.7) を用いると，

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n$$

となる ξ が x と x_0 の間に存在することが示せた．□

[3] 具体的な表示は必要ないが，あえて書くと次の式になる．x_0 も x も定数なので，A も定数である．

$$A = \frac{1}{(x-x_0)^n} \left\{ f(x) - f(x_0) - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m \right\}$$

[4] 両端の値が等しいとき Rolle の定理ともいう

Taylor 展開で $x_0 = 0$ としたものを Maclaurin 展開ともいう．

> **系【Maclaurin 展開】．**
> $f(x)$ が $x = 0$ の近くで C^n 級のとき，
>
> $$f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0)x^m + \frac{1}{n!} f^{(0)}(\xi)x^n$$
>
> となる ξ が 0 の近くで存在する．

1.2　積分

1.2.1　積分の定義のブラッシュアップ

積分も，微分と同様に，高校の教科書の定義のままでは 2 変数以上の関数に拡張できないのでブラッシュアップする．ここで積分とは「定積分」を指す．

まず，高校の教科書での積分（定積分）の定義を確認しておく．

> **定義【通常の 1 変数の積分の高校の教科書での定義】．**
> 関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき，a, b の大小によらず，定積分を
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
>
> で定義する．

注意【「原始関数」と「不定積分」の違い】．
普段はあまり違いを意識しないで同義語のように扱うことが多いが本来は別の概念である．

「$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数である」とは $F'(x) = f(x)$ をみたす関数のことで，積分を前提としない概念である．

一方「不定積分」とは，積分区間が $[a, x]$ のように変数を含む意味での「不定」である積分で，こちらは微分を前提としない概念である．

不定積分を求めると，それが原始関数になるので，ものとしてはほとんど同じでなる．

もちろん1変数の場合はこの定義で十分であるが，2変数以上になるとこの定義のまま拡張することはできないので，Riemann 和を用いて定義をしなおすことになる．

定義【通常の1変数の積分の Riemann 和での定義〜向きなし】．
区間 $[a, b]$ の分割 Δ を考え，$S_\Delta = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)|x_{i+1} - x_i| \quad (\xi_i \in (x_i, x_{i+1}))$ とする．この S_Δ を **Riemann 和**という．このとき，$|\Delta| = \max|x_{i+1} - x_i|$ として，極限 $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta$ が収束するとき，

$$\int_{[a,\,b]} f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta$$

と定義する．

ここで，積分の表現を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と定義する流儀もあるが，$a < b$ であるので，現時点で $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ という式は意味をなさないことに注意が必要である．では，$a < b$ に対して $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ はどのように定義するのであろうか．

定義【通常の1変数の積分の Riemann 和での定義〜向きあり】．
$a < b$ とする．$\displaystyle\int_{[a,\,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ と表した上で，定積分 $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ を「便宜的」に

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

と定義する．

ここが積分に「向き」が入る瞬間である．なお，何が「便宜的」なのかといえば，このように積分に向きを入れることで，いわゆる微分積分学の基本定理が成り立つということである．すなわち，定積分は原始関数で計算できるという高校数学の定義が出てくるのである．

積分計算をするときには，Riemann 和の極限で求めることはまずなく，普通は原始関数の差で求める．つまり，「積分」といえば「向きあり」を考えているということである[5]．

[5]「積分の向き」についての考察は，小澤 [7] を参照

第2章　多変数関数の微分

2.1　微分可能・偏微分

$\mathbb{R}^3$ 以上でも同様なので，簡単のため主に $\mathbb{R}^2$ で説明する．

> **定義【微分可能】．**
> $f(x, y)$ が，
> $$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|) \tag{2.1}$$
> となる α, β が存在するとき，$f(x, y)$ は 点 (x_0, y_0) で **微分可能** であるという．
> ここで，$\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$, $\boldsymbol{x} = (x, y)$ とした．

2.1.1　微分可能であることの図形的な意味

$z = f(x, y)$ は空間内での曲面になる．点 (x_0, y_0) に対して $z_0 = f(x_0, y_0)$ とすると，式 (2.1) は，

$$z - z_0 = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + o(|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}|)$$

となる．$o(|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}|)$ は他の 1 次の項より小さいので無視すると，

$$z - z_0 = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \tag{2.2}$$

となる．これは曲面上の点 (x_0, y_0, z_0) を通る平面を表す．しかも，この平面ともとの曲面との差は $o(|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}|)$ と 1 次式と比べてとても小さいので，曲面をもっともよく近似している平面，すなわち (x_0, y_0, z_0) での **接平面** を表していることがわかる．
ざっくり言えば，微分可能であることは，接平面が存在することだと言える．

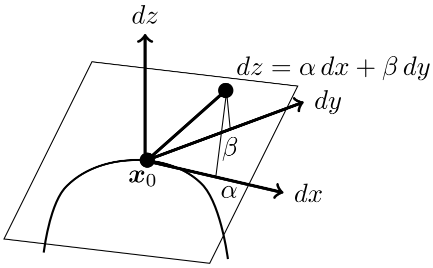
式 (2.2) において，点 (x_0, y_0, z_0) を基準とした新しい座標系 (dx, dy, dz) を考える．つまり，

$$\begin{cases} dx = x - x_0 \\ dy = y - y_0 \\ dz = z - z_0 \end{cases} .$$

すると，式 (2.2) は

$$dz = \alpha\, dx + \beta\, dy \tag{2.3}$$

と表せる．この dx, dy, dx をそれぞれ $\boldsymbol{x}$**,** $\boldsymbol{y}$**,** $\boldsymbol{z}$ **の微分** というが，この式 (2.3) は単に接平面の方程式を dx, dy, dz の斉次 1 次方程式で表しただけである．ざっくり言えば，微分とは 1 次近似だと思って良い．



$\boldsymbol{\alpha}$**,** $\boldsymbol{\beta}$ **の値**

では，α, β の値はどのように求めるのか．式 (2.1) は，

$$f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0) - \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) = o(|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}|)$$

で，

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{o(|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}|)}{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}|} = 0$$

なので，

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0) - \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0)}{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}|} = 0$$

である．ここで，$\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}$ の意味は，「$f(x,\, y)$ の定義域の中で，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}_0$ にあらゆる方向から近づける」であるので，特に $y = y_0$ と固定して x を x_0 に近づけても極限値は同じである．したがって，

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y = y_0}} \frac{f(x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0) - \alpha(x - x_0) - \beta(y_0 - y_0)}{|(x,\, y_0) - (x_0,\, y_0)|}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0)}{|x - x_0|} - \alpha \right\} = 0$$

となり，

$$\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0)}{x - x_0} \tag{2.4}$$

となる．つまり，$f(x,\, y)$ を $y = y_0$ と固定して x についてのみ微分した式が α である．

β についても同様で，$x = x_0$ と固定して y についてのみ微分した値が β である．

1 変数のブラッシュアップした微分の定義を用いた $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ の値の求め方

せっかく 1 変数の微分の定義をブラッシュアップしたので，これを用いて α, β の値を求めてみる．微分可能の定義式 (2.1) において，$y = y_0$ で固定すると，

$$f(x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0) = \alpha(x - x_0) + \beta(y_0 - y_0) + o(|(x,\, y) - (x_0,\, y_0)|)$$

より，

$$f(x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0) = \alpha(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

となる．この式は，$f(x,\, y_0)$ を x の 1 変数関数とみたときに，x_0 で微分可能であり，その微分係数が α であることを表している．したがって，α の値は 1 変数の微分係数を求める計算

$$\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x,\, y_0)}{x - x_0}$$

で求まる．

β についても同様で，$x = x_0$ と固定したとき $f(x_0,\, y)$ の y_0 での微分係数が β である．

> **定義.**
> 極限 $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x,\, y_0)}{x - x_0}$ が存在するとき，$f(x,\, y)$ は $(x_0,\, y_0)$ において，x について **偏微分可能** であるという．
> そして，その極限値を $\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0)}$ や $\boldsymbol{f_x(x_0,\, y_0)}$ と表し，$f(x,\, y)$ の $(x_0,\, y_0)$ における x についての **偏微分係数** という．つまり，
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0) = f_x(x_0,\, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0)}{x - x_0}$$
>
> である．
> y についても同様に定義する．したがって，
>
> $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0) = f_y(x_0,\, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,\, y) - f(x_0,\, y_0)}{y - y_0}$$
>
> である．

偏微分係数を用いると，式 (2.2) の接平面の方程式は，

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0)(y - y_0) \tag{2.5}$$

となる．微分を用いて表すと，

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = f_x\, dx + f_y\, dy$$

となる．$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ は微分 dx, dy の係数だから (偏) 微分係数である．なお，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ の $(x_0,\, y_0)$ は雰囲気を出すために省略した．

なお，図形的意味がわかりやすいように $z = f(x,\, y)$ としたが，関数は $z =$ とおくことは必須ではないので，この場合の微分の式は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = f_x\, dx + f_y\, dy$$

となる．

注意.

本来は，$dz = \alpha\, dx + \beta\, dy$ の $\alpha,\, \beta$ が偏微分係数で，その値は，$\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\beta = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ と求まる，つまり，「微分可能 $\Longrightarrow$ 偏微分係数が存在する」となるが，習慣上，偏微分係数は微分可能とは関係なく上のように定義する．したがって，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が存在しても $f(x,\, y)$ が微分可能とは限らない．

例.

$f(x,\, y) = \min(|x|,\, |y|)$ は $(0,\, 0)$ において，偏微分可能であるが微分可能でない．

実際，x 軸上，y 軸上では $f(x,\, y) = 0$ なので，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,\, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,\, 0) = 0$ で存在するが，例えば，直線 $y = x$ 上では，$f(x,\, y) = |x|$ であるので，$(0,\, 0)$ において接平面との誤差 $\varepsilon(x,\, y)$ は，

$$\varepsilon(x,\, y) = f(x,\, y) - \left\{ f(0,\, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,\, 0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\, 0)(y-0) \right\} = |x|$$

より，

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0} \\ x=y}} \frac{|x|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{0}|} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

となり，微分可能でない．

2.1.2 偏導関数の性質

1 変数と同様に，偏微分係数を関数と見たものを **偏導関数** という．また，偏導関数を求めることを **偏微分する**という．

偏微分係数は簡単に計算できるが，微分可能かどうかを直接調べるのは意外と面倒である．そこで，次の定理が役に立つ[1]．

[1]実用上はこの定理で十分だが，実際は条件を緩めることができる．「$f(x,\, y)$ が $(x_0,\, y_0)$ で偏微分可能であり，少なくとも一方の偏導関数が $(x_0,\, y_0)$ の近くで存在し $(x_0,\, y_0)$ で連続であれば，$f(x,\, y)$ は $(x_0,\, y_0)$ で微分可能である」．証明はこの緩めた条件の方で示す．

定理.
(x_0, y_0) の周囲において偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ がともに連続ならば，$f(x, y)$ は (x_0, y_0) において微分可能である.

証明.
$f(x, y)$ は x について，(x_0, y_0) で偏微分可能なので,

$$f(x, y_0) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x_0 - x) + o(x - x_0)$$

である．また，y については，(x_0, y_0) の周囲において偏微分可能なので，1 変数の平均値の定理より,

$$f(x, y) - f(x, y_0) = f_y(x, \eta)(y - y_0)$$

となる η が y と y_0 の間に存在する.
この２式より,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x, \eta)(y - y_0) + o(x - x_0) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + \left(f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0) \right)(y - y_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

となる.
ここで，$(f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0))(y - y_0)$ について．$f_y(x, y)$ は (x_0, y_0) の周囲で連続なので，$y \to y_0$ のとき $\eta \to y_0$ に注意すると,

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{\left(f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0) \right)(y - y_0)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} (f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)) \frac{(y - y_0)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} = 0$$

より,

$$(f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0))(y - y_0) = o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|)$$

である．また，$o(x - x_0) = o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|)$ であるので,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|)$$

となるので，この式は，$f(x, y)$ は (x_0, y_0) で微分可能であることを表している．□

2.1.3 高次の偏導関数

偏導関数の偏導関数，つまり２次偏導関数は，変数が複数あるので，次のように定義する.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

偏微分する順番が異なるので，一般には $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ である．
なお，記号の書き方の問題であるが，先に x で偏微分して，次に y で偏微分するときは，x, y を書く順序は $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$ のようになるので注意が必要である．
３次以上の偏導関数も同様に定義する．

定義.

$f(x, y)$ において，n 次偏導関数がすべて存在し，それらがすべて連続のとき，$\boldsymbol{f(x, y)}$ **は** $\boldsymbol{C^n}$ **級**であるという．

領域 Ω において，C^n 級の関数の集合を $\boldsymbol{C^n(\Omega)}$ と表す．

次の重要かつ便利な定理が成り立つ．

定理.

$f(x, y)$ が C^2 級のとき，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

が成り立つ．つまり，偏微分する変数の順序によらない．

$f(x, y)$ が C^n 級のときも同様に n 次偏導関数までは偏微分する順序によらない．

証明.

略．感覚として成り立つことが実感できれば十分．

2.1.4　合成関数の微分

$f(x, y)$ において，さらに (x, y) が t のベクトル値関数として $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ と表させるとき，合成関数 $f(\boldsymbol{\varphi}(t))$ が考えられる．

定理.

$\boldsymbol{\varphi}(t)$ が $t = t_0$ で微分可能であり，$f(x, y)$ が $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\varphi}(t_0)$ で微分可能であるとき，合成関数 $f \circ \boldsymbol{\varphi}(t)$ は t_0 で微分可能であり，

$$\frac{d}{dt} f \circ \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\frac{dy}{dt}(t_0)$$

が成り立つ．

証明.

$\boldsymbol{\varphi}(t)$ が t_0 で微分可能であり，$f(x,\,y)$ が $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ で微分可能であるので，

$$x(t)=x(t_0)+x'(t_0)(t-t_0)+o(t-t_0) \tag{2.6}$$

$$y(t)=y(t_0)+y'(t_0)(t-t_0)+o(t-t_0) \tag{2.7}$$

$$f(x,\,y)=f(x_0,\,y_0)+f_x(\boldsymbol{x}_0)(x-x_0)+f_y(\boldsymbol{x}_0)(y-y_0)+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|) \tag{2.8}$$

と表せる．ここで，$\boldsymbol{x}=(x,\,y)=\boldsymbol{\varphi}(t)$，$\boldsymbol{x}_0=(x_0,\,y_0)=\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ なので，式 (2.6)，(2.7) を式 (2.8) に代入すると，

$$f(\boldsymbol{\varphi}(t))=f(\boldsymbol{\varphi}(t_0))+f_x(\boldsymbol{x}_0)(x'(t_0)(t-t_0)+o(t-t_0))+f_y(\boldsymbol{x}_0)(y'(t_0)(t-t_0)+o(t-t_0))+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|)\,. \tag{2.9}$$

ここで，$A=\max\left(\,|x'(t_0)|,\,|y'(t_0)|\,\right)$ とすると，小さいオーダーの性質より，

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=\sqrt{\{l(t-t_0)+o(t-t_0)\}^2+\{m(t-t_0)+o(t-t_0)\}^2}\leqq A|t-t_0|+o(t-t_0)$$

となるので，$o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|)$ は $o(t-t_0)$ である．
式 (2.9) を整理すると，

$$f\circ\boldsymbol{\varphi}(t)=f\circ\boldsymbol{\varphi}(t_0)+\left(f_x(\boldsymbol{x}_0)x'(t_0)+f_y(\boldsymbol{x}_0)y'(t_0)\right)(t-t_0)+o(t-t_0)$$

となり，この式は，合成関数 $f\circ\boldsymbol{\varphi}(t)$ は t_0 で微分可能であり，その微分係数は $f_x(\boldsymbol{x}_0)x'(t_0)+f_y(\boldsymbol{x}_0)y'(t_0)$ であることを表している．□

1 変数と同様に微分を用いた別証も紹介する．

証明.

$\boldsymbol{\varphi}(t)=(x(t),\,y(t))$ が t_0 で微分可能であり，$f(x,\,y)$ が $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ で微分可能であるので，

$$df=f_x(\boldsymbol{x}_0)\,dx+f_y(\boldsymbol{x}_0)dy,\quad dx=x'(t_0)\,dt,\quad dy=y'(t_0)\,dt$$

と表せる．$dx,\,dy$ を代入すると，

$$df=f_x(\boldsymbol{x}_0)x'(t_0)\,dt+f_y(\boldsymbol{x}_0)y'(t_0)\,dt=\left(f_x(\boldsymbol{x}_0)x'(t_0)+f_y(\boldsymbol{x}_0)y'(t_0)\right)\,dt$$

となるので，$f\circ\boldsymbol{\varphi}(t)$ は t_0 で微分可能であり，微分係数は $f_x(\boldsymbol{x}_0)x'(t_0)+f_y(\boldsymbol{x}_0)y'(t_0)$ である．□

やはりとても明瞭な証明である．

次に，$(x,\,y)$ が $(u,\,v)$ のベクトル値関数として $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(u,\,v)$ と表させるとき．合成関数 $f(\boldsymbol{\varphi}(u,\,v))$ が考えられる．これは，$(x,\,y)$ から $(u,\,v)$ への変数変換である．

定理【変数変換の微分公式】.

$\boldsymbol{\varphi}(t)$ が $(u_0,\, v_0)$ で微分可能であり，$f(x,\, y)$ が $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\varphi}(u_0,\, v_0)$ で微分可能であるとき，合成関数 $f \circ \boldsymbol{\varphi}(u,\, v)$ は $(u_0,\, v_0)$ で微分可能であり，偏微分係数は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} f \circ \boldsymbol{\varphi}(u_0,\, v_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,\, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,\, v_0)\\ \frac{\partial}{\partial v} f \circ \boldsymbol{\varphi}(u_0,\, v_0) &= \frac{\partial f}{\partial v}(\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,\, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,\, v_0)\end{aligned}$$

である．

証明.

微分の定義を用いた証明もできるが，ここでは微分を用いて証明する．

$f(x,\, y)$ は $(x_0,\, y_0)$ で微分可能なので，

$$df = f_x\, dx + f_y\, dy$$

が成り立つ．また，$(x,\, y) = \boldsymbol{\varphi}(u,\, v)$ は $(u_0,\, v_0)$ で微分可能なので，

$$dx = x_u\, du + x_v\, dv, \quad dy = y_u\, du + y_v\, dv$$

が成り立つ．$dx,\, dy$ を代入すると，

$$df = f_x(x_u\, du + x_v\, dv) + f_y(y_u\, du + y_v\, dv) = (f_x x_u + f_y y_u)\, du + (f_x x_v + f_y y_v)\, dv$$

となる．これは，合成関数 $f \circ \boldsymbol{\varphi}(u,\, v)$ が $(u_0,\, v_0)$ で微分可能であることを表し，その偏微分係数は

$$f \circ \boldsymbol{\varphi}_u = f_x x_u + f_y y_u, \qquad f \circ \boldsymbol{\varphi}_v = f_x x_v + f_y y_v$$

である．□

補足.

この証明を行列を用いて表現してみる．

$$df = f_x\, dx + f_y\, dy = (f_x,\, f_y)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

$$dx = x_u\, du + x_v\, dv, \quad dy = y_u\, du + y_v\, dv$$

は，

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

なので，代入すると，

$$df = (f_x,\, f_y) \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

となる．

このように行列を用いると，1 変数のときと同様に，合成関数の微分が積で表されることが明確になる．

実用上はあまり気にしなくてよいが， 1 変数同様に次の性質がある．

> **定理【微分可能なら連続】．**
>
> $f(x,\,y)$ は， $(x_0,\,y_0)$ で微分可能なら連続である．

証明．

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} |f(x,\,y) - f(x_0,\,y_0)| = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} |\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + o\left(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\right)| = 0\ .\ \square$$

2.2 Taylor 展開

> **定理【$\mathbb{R}^2$ での平均値の定理】．**
>
> $f(x,\,y) \in C^1(\Omega)$ で 2 点 $(x,\,y)$, $(x_0,\,y_0)$ を結ぶ両端を含む線分が Ω に含まれるとき，
>
> $$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(y-y_0) \quad (0<\theta<1)$$
>
> をみたす θ が存在する．

証明．

$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ とおく．$\varphi(t)$ は $[0,\,1]$ で連続で $(0,\,1)$ で微分可能なので，平均値の定理より

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(y-y_0)$$

となる θ が $0<\theta<1$ に存在する．$\varphi(1) = f(\boldsymbol{x})$, $\varphi(0) = f(\boldsymbol{x}_0)$ より定理を得る．$\square$

定理【$\mathbb{R}^2$ での Taylor 展開】.

$f(x,\,y) \in C^n(\Omega)$ で 2 点 $(x,\,y)$, $(x_0,\,y_0)$ を結ぶ両端を含む線分が Ω に含まれるとき,

$$f(x,\,y) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} \left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0,\,y_0) + \varepsilon(n)$$

とできる.

ここで, $\varepsilon(n) = \dfrac{1}{n!}\left((x-x_0)\dfrac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\dfrac{\partial}{\partial y} \right)^n f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)) \quad (0<\theta<1)$ と表せる.

証明.

$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ とおく. $\varphi(1) = f(\boldsymbol{x})$, $\varphi(0) = f(\boldsymbol{x}_0)$ である.

$\varphi(t)$ を Maclaurin 展開すると,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta)$$

となる θ が $0<\theta<1$ に存在する.

$\varphi^{(m)}(t)$ について. $\varphi^{(m)}(t) = \left((x-x_0)\dfrac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\dfrac{\partial}{\partial y} \right)^m f(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))$ より定理を得る. □

注意.

当然のことであるが, n 次多項式を Taylor 展開すると, n 次の項でもとの多項式になる. そのことを実際に確認せよ.

2.3 極値

定理【極値の必要条件】.

$f(x,\,y) \in C^1(\Omega)$ が $(x_0,\,y_0) \in \Omega$ で極値をとるならば,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\,y_0) = 0$$

が成り立つ.

証明.

$f(x,\,y)$ が $(x_0,\,y_0)$ で極値をとるならば, 特に $y = y_0$ で固定した $f(x,\,y_0)$ も $(x_0,\,y_0)$ で極値をとる.

したがって, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,\,y_0) = 0$ が成り立つ.

同様に，$x = x_0$ で固定することで，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0) = 0$ も成り立つ．□

注意.

1 変数関数と同様に逆は成り立つとは限らない．

2.3.1　極値の判定法

そこで，万能ではないが次の性質がかなり有効である．

定義【Hessian】.

$f(x,\, y)$ において，

$$H(f) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

を **Hessian** という．

定理【極値の判定法】.

$f(x,\, y) \in C^2(\Omega)$ が $f_x(x_0,\, y_0) = f_y(x_0,\, y_0) = 0$ のとき，

(i) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\, y_0) > 0$ かつ $H(f)(x_0,\, y_0) > 0$ ならば，$(x_0,\, y_0)$ で極小値をとる．

(ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\, y_0) < 0$ かつ $H(f)(x_0,\, y_0) > 0$ ならば，$(x_0,\, y_0)$ で極大値をとる．

(iii) $H(f)(x_0,\, y_0) < 0$ ならば，$(x_0,\, y_0)$ で極値をとらない（鞍点）．

(iv) $H(f)(x_0,\, y_0) = 0$ のときは不明．（この情報では判断できない）

証明.

$f(x,\, y)$ を $(x_0,\, y_0)$ において，３次の項まで Taylor 展開すると，

$$\begin{aligned} f(x,\, y) \quad = \quad & f(x_0,\, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0)(x_0 - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0)(y - y_0) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\, y_0)(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,\, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,\, y_0)(y - y_0) \right) \\ & + R_3 \end{aligned}$$

となる．この２次の項を行列表示すると，

$$(x-x_0,\ y-y_0)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,\,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,\,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,\,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

であり，２次曲線の理論より，

$H(f)(x_0,\,y_0)<0$ のとき鞍点．したがって，極値にならない．（双曲放物面）

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\,y_0)>0$ かつ $H(f)(x_0,\,y_0)>0$ のとき，下に凸．したがって，極小値．（楕円放物面）

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\,y_0)<0$ かつ $H(f)(x_0,\,y_0)>0$ のとき，上に凸．したがって，極大値．（楕円放物面）

$H(f)(x_0,\,y_0)=0$ のときは，不明．□

最大値，最小値に関しては，次の性質が知られている．

定理．

閉領域上の連続関数は，最大値と最小値を持つ

証明．

さすがに簡単ではないので略．

これより，有界閉領域においては，最大値，最小値は，極値と周上の値を比較すれば良いことになる．

2.4 条件付き極値問題

定理【Lagrange の未定乗数法】．

$g(x,\,y)=0$ の条件のもとで $f(x,\,y)$ が $(x_0,\,y_0)$ で極値をとるならば，

$$F(x,\,y,\,\lambda)=f(x,\,y)-\lambda g(x,\,y)$$

とおくとき，

$$\begin{cases} F_x(x_0,\,y_0,\,\lambda) &= 0 \\ F_y(x_0,\,y_0,\,\lambda) &= 0 \\ F_\lambda(x_0,\,y_0,\,\lambda) &= 0 \end{cases}$$

をみたす．

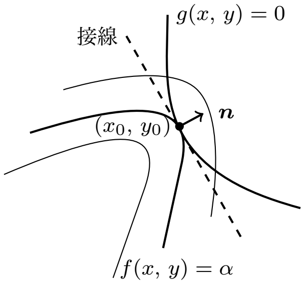
注：これは必要条件で，極値の候補が求まる．

証明.

等位線 $f(x,\, y) = \alpha$ を考える．$f(x,\, y)$ が $(x_0,\, y_0)$ で極値を持つとき，点 $(x_0,\, y_0)$ における２曲線 $f(x,\, y) = \alpha$ と $g(x,\, y) = 0$ の接線は一致する[2]ので，

$$f_x(x_0,\, y_0)\, dx + f_y(x_0,\, y_0)\, dy = 0 \quad \text{と} \quad g_x(x_0,\, y_0)\, dx + g_y(x_0,\, y_0)\, dy = 0$$

が一致する．



したがって各法ベクトルは，

$$(f_x(x_0,\, y_0),\ f_y(x_0,\, y_0)) \,/\!/\, (g_x(x_0,\, y_0),\ g_y(x_0,\, y_0))$$

つまり，$\lambda \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$\begin{cases} f_x(x_0,\, y_0) &= \lambda g_x(x_0,\, y_0) \\ f_y(x_0,\, y_0) &= \lambda g_y(x_0,\, y_0) \end{cases} \tag{2.10}$$

となる．これと条件の，

$$g(x_0,\, y_0) = 0 \tag{2.11}$$

を合わせたものが，極値となるための必要条件である．

ここで，式を見やすくするために，$\lambda \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$F(x,\, y,\, \lambda) = f(x,\, y) - \lambda g(x,\, y)$$

とおくと，式 (2.10)，(2.11) は，

$$\begin{cases} F_x(x_0,\, y_0,\, \lambda) &= f_x(x_0,\, y_0) - \lambda g_x(x_0,\, y_0) = 0 \\ F_y(x_0,\, y_0,\, \lambda) &= f_y(x_0,\, y_0) - \lambda g_x(x_0,\, y_0) = 0 \\ F_\lambda(x_0,\, y_0,\, \lambda) &= g(x_0,\, y_0) = 0 \end{cases}$$

と表すことができる．□

[2]逆は偽なので，この定理は必要条件になる

注意.

$\mathbb{R}^3$ では，等位線は等位面，接線は接平面になる．

例【反例】.

$f(x,\,y)=x^3+y,\quad g(x,\,y)=y=0$ のとき，$F(x,\,y,\,\lambda)=x^3+y-\lambda y$ とおくと，

$$F_x=3x^2=0,\qquad F_y=1-\lambda=0,\qquad F_\lambda=y=0$$

より，

$$\lambda=1\quad \text{で}\quad (x,\,y)=(0,\,0)$$

が極値の（唯一の）候補である．ところが，$g(x,\,y)=y=0$ より $f(x,\,0)=x^3$ なので，点 $(0,\,0)$ では $f(x,\,y)=x^3+y$ は極値にならない．

したがって，$y=0$ の条件のもと $f(x,\,y)$ は極値を持たない．

2.5 包絡線

定義【包絡線】.

α をパラメータとする曲線群 $f(x,\,y,\,\alpha)=0$ のすべての曲線が，一つの曲線に接しているとき，この曲線を **包絡線** という．

定理【包絡線の必要条件】.

曲線群 $f(x,\,y,\,\alpha)=0$ に包絡線が存在するならば，その包絡線は，

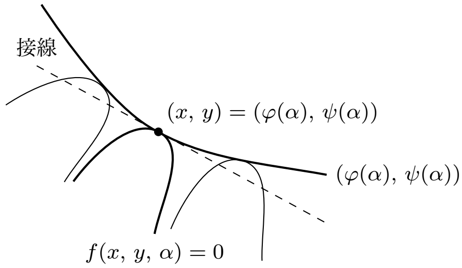
$$\begin{cases} f(x,\,y,\,\alpha) & = & 0 \\ f_\alpha(x,\,y,\,\alpha) & = & 0 \end{cases}$$

から α を消去した式をみたす．

注：これは必要条件である．つまり，包絡線があるならば，その候補が得られる．

証明.

包絡線が存在するとき，そのパラメータ表示を $(\varphi(\alpha),\,\psi(\alpha))$ とする．



点 $(x,\,y)=(\varphi(\alpha),\,\psi(\alpha))$ での $f(x,\,y,\,\alpha)=0$ の接線と 包絡線 $(\varphi(\alpha),\,\psi(\alpha))$ の接線は一致するので，$f_x(x,\,y,\,\alpha)\,dx+f_y(x,\,y,\,\alpha)\,dy$ 法線ベクトル $(f_x(x,\,y,\,\alpha),\,f_y(x,\,y,\,\alpha))$ と包絡線の速度ベクトル $(\varphi'(\alpha),\,\psi'(\alpha))$ は垂直である．したがって，

$$f_x(x,\,y,\,\alpha)\varphi'(\alpha)+f_y(x,\,y,\,\alpha)\psi'(\alpha)=0 \tag{2.12}$$

が包絡線であるための必要条件である．

また，すべての α において $f(\varphi(\alpha),\,\psi(\alpha),\,\alpha)=0$ が成り立つ．この式を α で微分すると，

$$f_x(\varphi(\alpha),\,\psi(\alpha),\,\alpha)\,\varphi'(\alpha)+f_y(\varphi(\alpha),\,\psi(\alpha),\,\alpha)\,\psi'(\alpha)+f_\alpha(\varphi(\alpha),\,\psi(\alpha),\,\alpha)=0$$

となるので，$(x,\,y)=(\varphi(\alpha),\,\psi(\alpha))$ より，式 (2.12) と同値な

$$f_\alpha(x,\,y,\,\alpha)=0$$

を得る．□

第3章　重積分

3.1　定義

$\mathbb{R}^3$ 以上でも同様なので，簡単のため主に $\mathbb{R}^2$ で説明する．

定義【長方形領域での重積分】．

長方形領域 $\Omega = [a,\, b] \times [c,\, d] \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,\, y)$ において，

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=i}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\boldsymbol{\xi}_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \qquad (\boldsymbol{\xi_{ij}} \in [x_{i-1},\, x_i] \times [y_{j-1},\, y_j])$$

が収束するとき，$f(x,\, y)$ は Ω 上で積分可能といい

$$\iint_\Omega f(x,\, y)\, dxdy$$

と表す．この積分を**重積分**ともいう．

※ $\mathbb{R}^3$ 以上では多重積分ともいう．

定義【一般の有界領域での重積分】．

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,\, y)$ に対して，Ω を含む長方形領域 $\widetilde{\Omega} = [a,\, b] \times [c,\, d]$ をとり，$\widetilde{f}(x,\, y)$ を

$$\widetilde{f}(x,\, y) = \begin{cases} f(x,\, y) & ((x,\, y) \in \Omega) \\ 0 & ((x,\, y) \in \widetilde{\Omega} \setminus \Omega) \end{cases}$$

とする．$\widetilde{f}(x,\, y)$ が $\widetilde{\Omega}$ 上で積分可能なとき，$f(x,\, y)$ は Ω 上で積分可能といい

$$\iint_\Omega f(x,\, y)\, dxdy = \iint_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{f}(x,\, y)\, dxdy$$

とする．

定理【領域の加法性】.

$f(x,\, y)$ が Ω 上積分可能で，$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,\ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$ のとき，

$$\iint_{\Omega} f(x,\, y)\, dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,\, y)\, dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,\, y)\, dxdy$$

が成り立つ.

証明.

略. 感覚として成り立つことが実感できれば十分.

3.2 重積分の性質

定理【積分の計算方法〜逐次積分】.

Ω が $x = a, b$ および $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x) \quad (a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x))$ で囲まれた領域のとき，Ω 上で連続な関数 $f(x,\, y)$ に対して，

$$\iint_{\Omega} f(x,\, y)\, dxdy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\, y)\, dy \right) dx$$

が成り立つ.

Ω が $y = c, d$ および $x = \psi_1(y), x = \psi_2(y) \quad (c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y))$ で囲まれた領域のときも同様.

証明.

略. 感覚として成り立つことが実感できれば十分.

定理【変数変換】.

$D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $x(u,\, v),\ y(u,\, v) \quad (u,\, v) \in D$ において.

$$\frac{\partial(x,\, y)}{\partial(u,\, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

であり，$f(x,\, y)$ が $\Omega = \{(x(u,\, v),\, y(u,\, v)) \,|\, (u,\, v) \in D\}$ 上で積分可能なとき，$f(x(u,\, v),\, y(u,\, v))$ は D 上積分可能で，

$$\iint_{\Omega} f(x,\, y)\, dxdy = \iint_{D} f(x(u,\, v),\, y(u,\, v)) \left| \frac{\partial(x,\, y)}{\partial(u,\, v)} \right| dudv$$

が成り立つ．

$\dfrac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}$ を Jacobian という．右辺の積分内の Jacobian に絶対値がついていることに注意せよ．

証明.

略．いくつか実際に計算して，成り立つことが実感できれば十分．

例【単位球の体積】.

単位球面の方程式は，$x^2+y^2+z^2=1$ より，
$\Omega=\left\{(x,\,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 1\right\}$ で，$f(x,\,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ とすれば，球の体積 V は，

$$V=2\int_{\Omega}f(x,\,y)\,dxdy=2\int_{x^2+y^2\leqq 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

である．ここで，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\quad(0\leqq r\leqq 1,\,0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と変数変換[1]すると，Jacobian は，

$$\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(r,\,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

より，

$$V=2\int_{\substack{0\leqq r\leqq 1\\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi}}f(r\cos\theta,\,r\sin\theta)r\,drd\theta=2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}r\sqrt{1-r^2}\,drd\theta=\frac{4}{3}\pi$$

と求まる．

[1] $\theta=0$ と $\theta=2\pi$ か重なるが，そこは面積 0 なので気にしない

第4章　ベクトル解析

説明を煩雑にしないため，以下で扱う関数は，十分なめらか（必要に応じていくらでも微分できるということ）とする．また，考える経路や領域は，考えている関数の定義域内にあるとする．実用上は困ることはない．

4.1　微分演算子

ベクトル解析で用いる **微分演算子** を定義する．

> **定義【ナブラ，nabla】．**
> 微分演算子 **ナブラ** を次の式で定義する．要素の数は次元と同じにとる．
>
> $$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

ナブラは，以下の定義のように用いる．

> **定義【勾配，gradient】．**
> 関数 $f(x,\, y,\, z)$ に対してその **勾配** を次の式で定義する．
>
> $$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

注意．
grad を用いると，微分は

$$df = \operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{x} = \nabla f \cdot d\boldsymbol{x}$$

と表せる．ここで，$d\boldsymbol{x} = (dx,\, dy,\, dz)$ とした．

定義【発散，divergence】．

ベクトル値関数 $\boldsymbol{A} = (A_1,\, A_2,\, A_3)$ に対して，その **発散** を次の式で定義する．

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

定義【回転，rotation】．

$\mathbb{R}^3$ において．ベクトル値関数 $\boldsymbol{A} = (A_1,\, A_2,\, A_3)$ に対して，その **回転** を次の式で定義する．

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right)$$

$\mathbb{R}^2$ において．2 変数 $\boldsymbol{A} = (A_1,\, A_2)$ を 3 変数 $\boldsymbol{A} = (A_1,\, A_2,\, 0)$ に拡張して，$\mathbb{R}^3$ の定義式に代入するが，第 1 成分，第 2 成分はともに 0 なので，

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}$$

とスカラーで定義する．

4.2 線積分

4.2.1 定義

曲線 $C : \boldsymbol{r} = (x(t),\, y(t),\, z(t)) \quad (a \leqq t \leqq b)$ とし，曲線の長さを s とする．
すなわち，$\left| \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| \neq 0$ であり $s = \displaystyle\int_a^t \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| dt$ ．
このとき，$\dfrac{ds}{dt} = \left| \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ である．
また，曲線 C の単位接ベクトル $\boldsymbol{t}$ は $\boldsymbol{t} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ である．

定義【線積分】．

(i) スカラー場 $f(x,\, y,\, z)$ の曲線 C に沿っての線積分を，

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(x(t),\, y(t),\, z(t)) \frac{ds}{dt}\, dt$$

で定義する．

(ii) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,\, y,\, z)$ の曲線 C に沿っての線積分を

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_C \boldsymbol{A}(x,\, y,\, z)\cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\, ds$$

で定義する．

注：右辺の $\boldsymbol{A}(x,\, y,\, z)\cdot \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ はスカラー場なので，(i) を用いることができる．すなわち，

$$\int_C \boldsymbol{A}(x,\, y,\, z)\cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\, ds = \int_a^b \boldsymbol{A}(x(t),\, y(t),\, z(t))\cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}\, dt = \int_a^b \boldsymbol{A}(x(t),\, y(t),\, z(t))\cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt\,.$$

ここで，$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt$ を $d\boldsymbol{r}$ と表すと，(ii) の左辺の式になる．

補足.

$d\boldsymbol{r} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \left(\dfrac{dx}{dt},\, \dfrac{dy}{dt},\, \dfrac{dz}{dt}\right)dt = (dx,\, dy,\, dz)$ となるので，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = (A_1,\, A_2,\, A_3)$ とするとき，

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (A_1,\, A_2,\, A_3)\cdot(dx,\, dy,\, dz) = \int_C A_1\, dx + A_2\, dy + A_3\, dz$$

と表すことができる．これを**微分形式**という．

注意.

本来は定義する前に，パラメータ t のとり方によらずに値が定まることを確認する（これを well-defined という）が，ここでは省略する．

定理.

点 P を始点，点 Q を終点とする任意の曲線 C に対して，

$$\int_C \operatorname{grad} f\cdot d\boldsymbol{r} = f(\mathrm{Q}) - f(\mathrm{P})$$

が成り立つ．

証明.

一般に，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz = \operatorname{grad} f\cdot(dx,\, dy,\, dz) = \operatorname{grad} f\cdot d\boldsymbol{r}$$

より，

$$\int_C \operatorname{grad} f\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C df = f(Q) - f(P)\,. \quad \square$$

系.

任意の閉曲線 C に対して,

$$\oint_C \operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

が成り立つ.

定義.

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し，$\operatorname{grad} f = \boldsymbol{A}$ をみたす f が存在するとき，$\boldsymbol{A}$ を**保存ベクトル場**，f を $\boldsymbol{A}$ の**スカラーポテンシャル**という.

$\operatorname{grad} f$ の線積分の性質より，以下の定理が成り立つ.

定理.

$\boldsymbol{A}$ を保存ベクトル場とし，そのスカラーポテンシャルを f とする．このとき，点 P を始点，点 Q を終点とする任意の曲線 C に対して,

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{r} = f(\mathrm{Q}) - f(\mathrm{P})$$

が成り立つ.

定理【ポテンシャルの存在】.

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ をみたすならば保存ベクトル場である．すなわち，$\operatorname{grad} f = \boldsymbol{A}$ をみたす f が存在する.

注：逆の $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \boldsymbol{0}$ は明らか.

証明.

$\boldsymbol{A} = (A_1,\, A_2,\, A_3)$ とするとき,

$$f(x,\, y,\, z) = \int_{x_0}^{x} A_1(x,\, y,\, z)\, dx + \int_{y_0}^{y} A_2(x_0,\, y,\, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} A_3(x_0,\, y_0,\, z)\, dz$$

とすればよい.

以下これを示す．まず，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

より，

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial z}, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial y} \tag{4.1}$$

である．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} A_1(x,\,y,\,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial A_2}{\partial x}(x_0,\,y,\,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_3}{\partial x}(x_0,\,y_0,\,z)\,dz = A_1(x,\,y,\,z)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial A_1}{\partial y}(x,\,y,\,z)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} A_2(x_0,\,y,\,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_3}{\partial y}(x_0,\,y_0,\,z)\,dz \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial A_2}{\partial x}(x,\,y,\,z)\,dx + A_2(x_0,\,y,\,z) \qquad (\because (4.1)) \\
&= A_2(x,\,y,\,z) - A_2(x_0,\,y,\,z) + A_2(x_0,\,y,\,z) \\
&= A_2(x,\,y,\,z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial A_1}{\partial z}(x,\,y,\,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial A_2}{\partial z}(x_0,\,y,\,z)\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\int_{z_0}^{z} A_3(x_0,\,y_0,\,z)\,dz \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial A_3}{\partial x}(x,\,y,\,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial A_3}{\partial y}(x_0,\,y,\,z)\,dy + A_3(x_0,\,y_0,\,z) \qquad (\because (4.1)) \\
&= A_3(x,\,y,\,z) - A_3(x_0,\,y,\,z) + A_3(x_0,\,y,\,z) - A_3(x_0,\,y_0,\,z) + A_3(x_0,\,y_0,\,z) \\
&= A_3(x,\,y,\,z)
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\,\frac{\partial f}{\partial y},\,\frac{\partial f}{\partial z}\right) = (A_1,\,A_2,\,A_3) = \boldsymbol{A}\,. \qquad \square$$

4.2.2 逆向きの線積分

曲線 C を逆向きに辿る曲線を $-C$ で表す．ベクトル場の線積分では次の重要な性質が成り立つ．なお，スカラー場の線積分では一般に成り立たない．（小澤 [7] 参照）

定理.

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と曲線 C において,

$$\int_{-C} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{C} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

が成り立つ.

証明.

線積分は曲線のパラメータのとり方によらないので，曲線 $C,\ -C$ のパラメータを,

$$\begin{array}{ccc} C: & \varphi(t) & t: 0 \to 1 \\ -C: & \psi(t) = \varphi(1-t) & t: 0 \to 1 \end{array}$$

とする.

$$\begin{aligned} \int_{-C} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \boldsymbol{A}(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \boldsymbol{A}(\psi(t)) \cdot (-\varphi'(1-t))\, dt \\ &= \int_1^0 \boldsymbol{A}(\psi(1-\tau)) \cdot (-\varphi'(\tau))\, (-d\tau) \qquad (\because \tau = 1-t) \\ &= -\int_0^1 \boldsymbol{A}(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\, d\tau \\ &= -\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}\, . \qquad \square \end{aligned}$$

4.3 面積分

4.3.1 定義

曲面 $S : \boldsymbol{r} = (x(u,\,v),\, y(u,\,v),\, z(u,\,v)) \quad (u,\,v) \in D$ とする.
このとき，面素 dS は $dS = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, dudv = \sqrt{|\boldsymbol{r}_u|^2|\boldsymbol{r}_v|^2 - (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2}\, dudv$ である.
また，曲面 S の単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$ である.

定義.

(i) スカラー場 $f(x,\,y,\,z)$ の曲面 S 上での面積分を,

$$\int_S f\, dS = \int_D f(x(u,\,v),\, y(u,\,v),\, z(u,\,v))\, |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, dudv$$

で定義する.

(ii) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,\,y,\,z)$ の曲面 S 上での面積分を，

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_S \boldsymbol{A}(x,\,y,\,z)\cdot\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}\,dS$$

で定義する．

注：右辺の $\boldsymbol{A}(x,\,y,\,z)\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$ はスカラー場なので，(i) を用いることができる．すなわち，

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{A}(x,\,y,\,z)\cdot\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}\,dS &= \int_D \boldsymbol{A}(x(u,\,v),\,y(u,\,v),\,z(u,\,v))\cdot\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}\,|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,dudv\\ &= \int_D \boldsymbol{A}(x(u,\,v),\,y(u,\,v),\,z(u,\,v))\cdot\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\,dudv\,.\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\,dudv$ を $d\boldsymbol{S}$ で表すと，(ii) の左辺の式になる．

補足．

$\dfrac{\partial(y,\,z)}{\partial(u,\,v)}\,dudv = dy\wedge dz$ などと表すと，

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\,dudv = \begin{pmatrix}x_u\\ y_u\\ z_u\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_v\\ y_v\\ z_v\end{pmatrix}dudv = \left(\frac{\partial(y,\,z)}{\partial(u,\,v)},\,\frac{\partial(z,\,x)}{\partial(u,\,v)},\,\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\right)dudv\\ &= (dy\wedge dz,\,dz\wedge dx,\,dx\wedge dy)\end{aligned}$$

となる．

$dy\wedge dx = \dfrac{\partial(y,\,x)}{\partial(u,\,v)}\,dudv = -\dfrac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\,dudv = -dx\wedge dy$ なので書く順序に気をつけること．また，$dx\wedge dy$ と $dxdy$ は異なるので注意せよ．

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = (A_1,\,A_2,\,A_3)$ とするとき，

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_S (A_1,\,A_2,\,A_3)\cdot(dy\wedge dz,\,dz\wedge dx,\,dx\wedge dy)\\ &= \int_S A_1\,dy\wedge dz + A_2\,dz\wedge dx + A_3\,dx\wedge dy\end{aligned}$$

と表すことができる．これを**微分形式**という．

4.3.2 逆向きの面積分

曲面 S と法線方向が逆向きの曲面を $-S$ で表す．ベクトル場の面積分では次の重要な性質が成り立つ．なお，スカラー場の面積分では一般に成り立たない．（小澤 [7] 参照）

定理.

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と曲面 S において,

$$\int_{-S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_{S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

が成り立つ.

証明.

曲面 $S,\ -S$ のパラメータを,

$$\begin{array}{rcl} S: & \boldsymbol{\varphi}(u,\,v) & u:0\to 1,\ v:0\to 1 \\ -S: & \boldsymbol{\psi}(u,\,v)=\boldsymbol{\varphi}(1-u,\,v) & u:0\to 1\ v:0\to 1 \end{array}$$

とする.

$$\boldsymbol{\psi}_u(u,\,v) = -\boldsymbol{\varphi}_u(1-u,\,v),\quad \boldsymbol{\psi}_v(u,\,v) = \boldsymbol{\varphi}_v(1-u,\,v)$$

より,

$$\boldsymbol{\psi}_u\times\boldsymbol{\psi}_v(u,\,v) = -\boldsymbol{\varphi}_u\times\boldsymbol{\varphi}_v(1-u,\,v)$$

となるので,

$$\begin{aligned} \int_{-S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\psi}(u,\,v))\cdot\boldsymbol{\psi}_u\times\boldsymbol{\psi}_v(u,\,v)\,dudv \\ &= \int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varphi}(1-u,\,v))\cdot(-\boldsymbol{\varphi}_u\times\boldsymbol{\varphi}_v(1-u,\,v))\,dudv \\ &= \int_{w=1}^{0}\int_{v=0}^{1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varphi}(w,\,v))\cdot(-\boldsymbol{\varphi}_u\times\boldsymbol{\varphi}_v(w,\,v))\,(-dw)dv \quad (\because w=1-u) \\ &= -\int_{w=0}^{1}\int_{v=0}^{1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varphi}(w,\,v))\cdot\boldsymbol{\varphi}_u\times\boldsymbol{\varphi}_v(w,\,v)\,dwdv \\ &= -\int_{S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}\,. \qquad \square \end{aligned}$$

4.4 微分と積分の関係

1 変数では, 定積分の計算は原始関数の差で求まるという重要な性質があるが, この節での定理は, この性質の多変数への拡張と捉えることができる.

4.4.1 Green の定理

定理【Green's theorem】.

$S \subset \mathbb{R}^2$ を有界領域とする．このとき，

$$\int_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial S} f\,dx + g\,dy$$

が成り立つ．

注：左辺は普通の重積分である．

注意.

$\boldsymbol{A} = (f,\, g)$ とすると，

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\, dxdy = \int_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

と Stokes の定理（4.4.3 節）になる．

また，$\boldsymbol{A} = (g,\, -f)$ とすると，

$$\int_S \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dxdy = \int_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$

と Gauss の発散定理（4.4.2 節）になる．なお，$\boldsymbol{n}$ は ∂S の外向きの法ベクトルで，$\boldsymbol{n}\, ds = (-dy,\, dx)$ である．

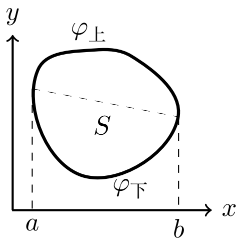
証明.

領域 S を細かく分割して考え，それぞれの隣り合う小領域どうしの共通の境界の向きは逆なので，線積分の値は打ち消し合うので，小領域で証明したあと，すべての小領域をつなぎ合わせれば S 全体の性質になる．したがって，領域ははじめから計算しやすい形状を仮定してよい．

まず，

$$-\int_S \frac{\partial f}{\partial y}\, dxdy = \int_{\partial S} f\, dx$$

について，S を以下の領域として示す．



$$S : (x,\, y) \qquad \begin{cases} a \leqq x \leqq b \\ \varphi_{\text{下}} \leqq y \leqq \varphi_{\text{上}} \end{cases}$$

境界 ∂S のパラメータ表示と，$d\boldsymbol{r}$ は，

$$
\begin{array}{lcll}
S_{\text{上}} & : & (x,\,\varphi_{\text{上}}(x)) \quad x : b \to a & \qquad d\boldsymbol{r} = (dx,\,dy) = (dx,\ \varphi'_{\text{上}}\,dx) \\
S_{\text{下}} & : & (x,\,\varphi_{\text{下}}(x)) \quad x : a \to b & \qquad d\boldsymbol{r} = (dx,\,dy) = (dx,\ \varphi'_{\text{下}}\,dx)
\end{array}
$$

である．特に $S_{\text{上}}$ のパラメータが $x : b \to a$ であることに注意せよ．

$$
\begin{aligned}
-\int_S \frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy &= -\int_{x=a}^{b}\int_{y=\varphi_{\text{下}}}^{\varphi_{\text{上}}} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)\,dxdy \\
&= -\int_{x=a}^{b} \big(f(x,\,\varphi_{\text{上}}) - f(x,\,\varphi_{\text{下}})\big)\ dx \\
&= \int_b^a f(x,\,\varphi_{\text{上}})\,dx + \int_a^b f(x,\,\varphi_{\text{下}})\,dx \qquad \text{(普通の積分)} \\
&= \int_{\partial S_{\text{上}}} f\,dx + \int_{\partial S_{\text{下}}} f\,dx \qquad \text{(線積分)} \\
&= \int_{\partial S} f\,dx
\end{aligned}
$$

となる．

同様に，

$$
\int_S \frac{\partial g}{\partial x}\,dxdy = \int_{\partial S} g\,dy
$$

も示せる．□

4.4.2 Gauss の発散定理

定理【Gauss's divergence theorem】．

$V \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とする．このとき，

$$
\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}\,dV = \int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}
$$

が成り立つ．

注：$\displaystyle\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,dV = \int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ と表すこともできる．

注意．

dV は体積要素で，$dV = dxdydz$ である．したがって，左辺は普通の重積分である．

証明.

領域 V を細かく分割して考え，それぞれの隣り合う小領域どうしの共通の面においては法線の向きが逆なので，面積分の値は打ち消し合うので，小領域で証明したあと，すべての小領域をつなぎ合わせれば V 全体の性質になる．したがって，領域ははじめから計算しやすい形状を仮定してよい．

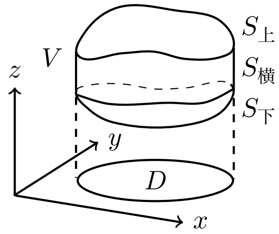
$$
\begin{aligned}
\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,dV &= \int_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial y}\right) dxdydz\ , \\
\int_{\partial V} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_{\partial V} A_1\,dy\wedge dz + A_2\,dz\wedge dx + A_3\,dx\wedge dy
\end{aligned}
$$

より，それぞれの対応する項ごとの等式を示せばよい．

まず，第３項の

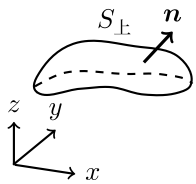
$$\int_V \frac{\partial A_3}{\partial y}\,dxdydz = \int_{\partial V} A_3\,dx\wedge dy$$

について，V を次の柱状領域として示す．$\partial V = S_{上}+S_{横}+S_{下}$ である．また V を xy 平面に射影した領域を D とする．



$$
\begin{aligned}
S_{上} &: \ \boldsymbol{\varphi}_{上}(x,\,y) = (x,\,y,\,\varphi_{上}(x,\,y)) \quad (x,\,y)\in D \\
S_{横} &: \ (x,\,y,\,z) \quad (x,\,y)\in\partial D,\quad \varphi_{下}\leqq z\leqq\varphi_{上} \\
S_{下} &: \ \boldsymbol{\varphi}_{下}(x,\,y) = (x,\,y,\,\varphi_{下}(x,\,y)) \quad (x,\,y)\in D
\end{aligned}
$$

まず，$S_{上}$ について．$S_{上}$ の法ベクトル $\boldsymbol{n}$ は z 成分が正となる向きなので，$x,\,y,\,\boldsymbol{n}$ が右手系となるような D の $x,\,y$ の順は $x\to y$ である[1]．



したがって，

$$dx\wedge dy = \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(x,\,y)}dxdy = dxdy\ . \tag{4.2}$$

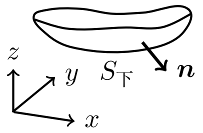
ここで，$\dfrac{\partial(x,\,y)}{\partial(x,\,y)}$ の分子の $(x,\,y)$ は $S_{上}$ 上の点，分母の $(x,\,y)$ は D 上の点の $(x,\,y)$ である．

[1]つまり，$(x,\,y)\in D$ で，$S_{上}$ の法ベクトルは

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_{上}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_{上}}{\partial y} = \left(1,\,0,\,\frac{\partial\varphi_{上}}{\partial x}\right)\times\left(0,\,1,\,\frac{\partial\varphi_{上}}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial\varphi_{上}}{\partial y},\,-\frac{\partial\varphi_{上}}{\partial x},\,1\right)\quad (x,\,y)\in D$$

と同じ向きということ

次に，$S_{\text{下}}$ について，$S_{\text{下}}$ の法ベクトル $\boldsymbol{n}$ は z 成分が負となる向きなので，$x, y, \boldsymbol{n}$ が右手系となるような D の x, y の順は $y \to x$ である[2].



したがって，

$$dx \wedge dy = \frac{\partial(x,\, y)}{\partial(y,\, x)} dxdy = -dxdy\ . \tag{4.3}$$

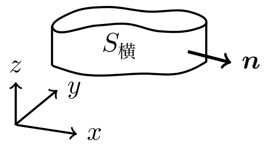
ここで，分母の x, y の順序が (y, x) となっていることがポイントである．

以上のことより，

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\partial A_3}{\partial y}\, dxdydz &= \iint_{(x,\,y)\in D} \int_{z=\varphi_{\text{下}}}^{\varphi_{\text{上}}} \frac{\partial A_3}{\partial z}(x,\, y,\, z)\, dxdydz \\
&= \iint_{(x,\,y)\in D} \big(A_3(x,\, y,\, \varphi_{\text{上}}) - A_3(x,\, y, \varphi_{\text{下}}) \big)\ dxdy \\
&= \iint_{(x,\,y)\in D} A_3(x,\, y,\, \varphi_{\text{上}})\, dxdy + \iint_{(x,\,y)\in D} A_3(x,\, y, \varphi_{\text{下}})\, (-dxdy) \\
&= \int_{S_{\text{上}}} A_3\, dx \wedge dy + \int_{S_{\text{下}}} A_3\, dx \wedge dy \qquad (\because (4.2),\, (4.3))
\end{aligned}$$

となるが，まだ $S_{\text{横}}$ を考慮していないので，右辺は $\displaystyle\int_{\partial V} A_3\, dx \wedge dy$ ではないことに注意せよ．

最後に $S_{\text{横}}$ について．



$S_{\text{横}}$ の法ベクトルの z 成分は 0 なので，

$$dx \wedge dy = 0\, dS$$

である[3]．したがって，

$$\int_{S_{\text{横}}} A_3\, dx \wedge dy = \iint_{(x,\,y)\in D} A_3 \times 0\, dS = 0$$

---

[2] こんどは，$(y, x) \in D$ で，$S_{\text{下}}$ の法ベクトルは

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{\text{下}}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{\text{下}}}{\partial x} = \left(0,\, 1,\, \frac{\partial \varphi_{\text{下}}}{\partial y} \right) \times \left(1,\, 0,\, \frac{\partial \varphi_{\text{下}}}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial \varphi_{\text{下}}}{\partial y},\, \frac{\partial \varphi_{\text{下}}}{\partial y},\, -1 \right) \quad (y,\, x) \in D$$

と同じ向きということ

[3] $\boldsymbol{n} = (\alpha,\, \beta,\, 0)$ より，$(dy \wedge dz,\, dz \wedge dx,\, dx \wedge dy) = (\alpha,\, \beta,\, 0)\, dS$ ということ

となる．

上の式と合わせると，

$$\int_V \frac{\partial A_3}{\partial y}\,dxdydz = \int_{S_{\text{上}}} A_3\,dx\wedge dy + \int_{S_{\text{下}}} A_3\,dx\wedge dy + \int_{S_{\text{横}}} A_3\,dx\wedge dy = \int_{\partial V} A_3\,dx\wedge dy$$

を得る．

第 1 項，第 2 項も，それぞれの向きの柱状領域を考えれば同様に示せる．□

4.4.3 Stokes の定理

定理【Stokes' theorem】．

$S\subset\mathbb{R}^3$ を有界な開曲面とする．このとき，

$$\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial S} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

が成り立つ．

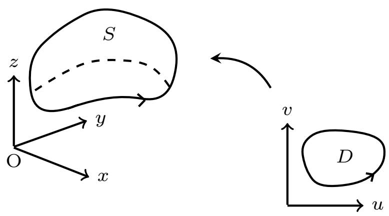
注：$\displaystyle\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot dV = \int_{\partial S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ と表すこともできる．

証明．

Green の定理の証明と同様に領域 S ははじめから計算しやすい形状を仮定してよい．

$$S : (x(u,\,v),\ y(u,\,v),\ z(u,\,v))\quad (u,\,v)\in D$$

とする．ただし，∂S の向きと ∂D の向きは対応するようにとる．



$$
\begin{aligned}
\int_{\partial S} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{\partial D} \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{r}_u\,du+\boldsymbol{r}_v\,dv) \\
&= -\int_D \frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}_u)\,dudv+\int_D \frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}_v)\,dudv \qquad (\because \text{Green}) \\
&= \int_D \left(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial v}\cdot\boldsymbol{r}_u-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial u}\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}_{vu}\right)dudv \\
&= \int_D \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial u}\cdot\boldsymbol{r}_v-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial v}\cdot\boldsymbol{r}_u\right)dudv \\
&= \int_D \left(\frac{\partial A_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial A_2}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial A_3}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right. \\
&\qquad\left.-\frac{\partial A_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial A_2}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial A_3}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)dudv \\
&= \int_D \left(\nabla A_1\cdot\boldsymbol{r}_u\frac{\partial x}{\partial v}+\nabla A_2\cdot\boldsymbol{r}_u\frac{\partial y}{\partial v}+\nabla A_3\cdot\boldsymbol{r}_u\frac{\partial z}{\partial v}\right. \\
&\qquad\left.-\nabla A_1\cdot\boldsymbol{r}_v\frac{\partial x}{\partial u}-\nabla A_2\cdot\boldsymbol{r}_v\frac{\partial y}{\partial u}-\nabla A_3\cdot\boldsymbol{r}_v\frac{\partial z}{\partial u}\right)dudv \\
&= \int_D \left(\nabla A_1\cdot\begin{pmatrix}0\\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\end{pmatrix}+\nabla A_2\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\\ 0\\ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\end{pmatrix}\right. \\
&\qquad\left.+\nabla A_3\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\\ 0\end{pmatrix}\right)dudv \\
&= \int_D \begin{pmatrix}\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\\ \frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\\ \frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\end{pmatrix}dudv \\
&= \int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot(dy\wedge dz,\ dz\wedge dx,\ dx\wedge dy) \\
&= \int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}\,. \quad \square
\end{aligned}
$$

注意.

Gauss の発散定理では項ごとに証明するので，それぞれの向きの柱状領域を考えれば十分であったが，Stokes の定理は項ごとの証明ではないので，ある程度一般的な領域で証明する必要がある.

参考文献

[1] 笠原晧司．微分積分学（サイエンスライブラリ数学 12）．サイエンス社，1974.

[2] 洲之内治男，和田淳蔵．改訂微分積分 （サイエンスライブラリ理工系の数学２）．サイエンス社，1986.

[3] 深見哲造．ベクトル解析（数学ワンポイント双書 12）．共立出版，1977.

[4] 増田真郎．ベクトル解析（サイエンスライブラリ理工系の数学 5）．サイエンス社，1975.

[5] 森毅．ベクトル解析（ちくま学芸文庫）．筑摩書房，2009.

[6] 涌井良幸．高校生からわかるベクトル解析．ベレ出版，2017.

[7] 小澤嘉康．積分の向きについての考察．海城学園研究集録　第 48 集，2024.